MANUALI HOEPLI

MECCANICA RAZIONALE

DI

ROBERTO MARCOLONGO

PROFESSORE ORDINARIO NELLA R. UNIVERSITÀ DI MESSINA.

I.

CINEMATICA. — STATICA.

CON 35 INCISIONI.

ULRICO HOEPLI

EDITORE-LIBRAJO

MILANO

—

1905

PREFAZIONE

La collezione dei Manuali Hoepli, che comprende già eccellenti trattati di Calcolo, di Matematiche superiori, di Fisica, ecc., mancava di un trattatello di Meccanica, che potesse servir di guida ai giovani delle nostre Università e delle Scuole di Applicazione. Con questi due volumetti di *« Elementi di Meccanica Razionale »* io ho fatto del mio meglio per colmare tale lacuna.

Questi elementi, che in grandissima parte riassumono le lezioni svolte, da varî anni, nell'Università di Messina, sono scritti per gli studenti; non offrono quindi nessuna novità di metodo e non hanno alcuna pretesa; si propongono di presentare un quadro sintetico delle più importanti teorie della Meccanica classica e di dare anche un cenno delle più recenti, con una esposizione che mi sono sforzato di render chiara, senza esser prolissa, e con numerose applicazioni.

Comprendono tre parti, nelle quali seguo la classica divisione della Meccanica; la prima e la seconda trattano la Cinematica e la Statica (primo volume); la terza parte (secondo volume) comprende la Dinamica e i primi elementi della Idromeccanica (Idrostatica ed Idrodinamica).

Oltre le applicazioni che a mano a mano si troveranno nel testo, alla fine di ogni capitolo sono proposti alcuni esercizi (oltre duecento in tutto), di cui, in breve, accenno la soluzione. Non è necessario insistere sulla utilità di questi esercizi, il cui scopo è di ben fissare nella mente le teorie ed anche di completarle. In molte Scuole d'Applicazione vi ha, è vero, un corso di esercizi di Meccanica; ma, forse, la mancanza di esami scritti, obbligatori in Francia (Licence), Inghilterra (College Exam.; Mathem. Tripos, St.-John's College, ecc.), ha fatto sì che noi non abbiamo nessuna di quelle eccellenti raccolte di esercizi che posseggono la Francia e la Germania, e sono la caratteristica dei libri inglesi. La raccolta molto modesta di questi volumetti, compilata in parte su memorie originali, ripara molto limitatamente alla deplorata mancanza.

In tutto il trattatello io adopero i metodi del Calcolo vettoriale, di cui il Cap. 1° del 1° volume riassume i punti più essenziali. Sarebbe invero desiderabile che tali metodi fossero più diffusi ed applicati con maggior larghezza (come si fa in

qualche Università) nel corso di Geometria analitica e in quello di Calcolo infinitesimale; ma anche coi semplici elementi esposti, specialmente in vista delle applicazioni alla Meccanica ed alla Fisica, si ha mezzo di poterne apprezzare tutti i vantaggi. Se lo studente vorrà maggiormente approfondire l'argomento, legga e studi le pubblicazioni così chiare e suggestive del Prof. PEANO, citate nel testo e quelle del Prof. BURALI-FORTI, tra cui le recentissime *Lezioni di Geometria Metrico-Proiettiva,* Torino 1904.

Fra i trattati di Meccanica in cui è fatta sistematicamente l'applicazione di questi metodi dobbiamo ricordare le *Lezioni di Meccanica Razionale* del Prof. CASTELLANO, Torino 1894; e le *Vorlesüngen über technische Mechanik* del FÖPPL.

Ho largamente approfittato di molti trattati che, nei luoghi opportuni, ho sempre citati. Tra questi debbo porre in prima linea il classico: *Treatise on Natural Philosophy,* Cambridge 1895-1896, di THOMSON e TAIT.

Possano i semplici accenni del testo invogliare gli studiosi a meditare e rendere tra noi più nota e popolare l'opera poderosa del grande fisico-matematico inglese!

Inoltre ho consultato:

ROUTH J. E. 1) *A Treatise on Dynamics of a Particle,* Cambridge 1898. 2) *A Treatise on*

Analytical Statics, 1892-1896. 3) *Die Dynamik d. Systeme starrer Körper*.

APPELL, *Traité de Mécanique rationnelle*, 3 vol. 1893-1903.

SOMOFF, *Theoretische Mechanik - Kinematik*, Leipzig, 1878; *Einleitung in die Statik u. Dynamik*, 1879.

SCHELL, *Theorie der Bewegung u. der Kräfte*, 2. vol. 1879-1880.

MAGGI, *Teoria matematica del movimento dei corpi*. Milano, 1896. *Principii di Stereodinamica*, 1903; le raccolte di esercizi del JULLIEN e del SAINT-GERMAIN; la *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* Bd. IV; finalmente le lezioni litografate del mio venerato maestro Prof. CERRUTI, sotto la cui direzione sapiente, per lunghi e belli anni, ho svolto il corso di esercizi nella Scuola d'Applicazione in Roma; e quelle del chiaro collega Prof. LEVI-CIVITA dell'Università di Padova.

L'amore vivissimo che ho sempre avuto per la storia delle matematiche; la ferma convinzione che i richiami storici servono potentemente a fissare l'attenzione dello studente; mi hanno consigliato infine a porre qua e là alcune brevi note storiche. Per molte questioni speciali si consulterà con profitto la bellissima opera del LORIA, *Spezielle, algebraischen u. transcendenten Kurven der Ebene. Theorie u. Geschichte*, Leipzig, 1902; e quella ben

nota del MACH, di cui mi riferisco alla recente traduzione francese: *La Mécanique, Exposé historique et critique de son développement*, Paris, 1904.

Al Prof. BOGGIO, dell'Università di Torino, che suggerendomi modificazioni ed osservazioni, mi è stato di valido aiuto; al mio allievo Dr. LO SURDO, che ha diviso con me la fatica della revisione delle bozze, i miei più vivi, affettuosi ringraziamenti.

L'editore Comm. Hoepli e la Tipografia Matematica di Palermo, che nella stampa di questo primo dei manuali a lei affidata non ha smentito la sua oramai ben assodata fama, hanno fatto il possibile per la buona riuscita dell'operetta.

Se all'amore con cui è stata composta, non avesse troppo spesso fatto difetto la scienza e l'esperienza dell'autore, essa non sarebbe certamente riuscita così imperfetta.

Confido tuttavia che possa essere ancora di qualche utilità agli studenti italiani.

Messina, 1 agosto 1904.

ROBERTO MARCOLONGO.

INDICE

PARTE PRIMA.

CINEMATICA.

CAPITOLO PRIMO.

Operazioni sui vettori. Sistemi di vettori.

CAPITOLO SECONDO.

Velocità ed accelerazione.

CAPITOLO TERZO.

Analisi del moto finito di un sistema rigido. Composizione dei moti finiti.

CAPITOLO QUARTO.

Analisi del moto istantaneo di un sistema rigido.

CAPITOLO QUINTO.

Moto continuo di un sistema rigido.

PARTE SECONDA

STATICA.

CAPITOLO PRIMO.

Composizione delle forze.

CAPITOLO SECONDO.

Il principio dei lavori virtuali.

CAPITOLO TERZO.

Equilibrio delle curve funicolari.

PARTE PRIMA

CINEMATICA.

CAPITOLO PRIMO.

OPERAZIONI SUI VETTORI. SISTEMI DI VETTORI.

§ 1. **Vettori e loro operazioni** *. — Nella Meccanica occorre considerare grandezze che risultano pienamente determinate dai numeri che le misurano (in una certa scala): esse diconsi *scalari;* p. es. le masse, le temperature, i lavori, ecc. Altre grandezze dipendono oltre che dal concetto di misura anche da quello di direzione e diconsi *vettoriali:* p. es. le forze, le velocità; ecc.

Un *vettore* si immagina rappresentato in grandezza, direzione e senso da un segmento AB, ge-

* Per una sistematica e completa esposizione di questa teoria, che giova premettere al corso di Meccanica, vedi le pubblicazioni del prof. PEANO: *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di* H. GRASSMANN (Torino, 1888); *Saggio di Calcolo geometrico* [Atti Acc. Sc. di Torino, **31** (1895-96)]; ed inoltre: BURALI-FORTI, *Introduction à la Géomètrie différen. suivant la méthode de* H. GRASSMANN (Paris, 1897).

nerato dal trasporto del punto A in B lungo la retta AB; si rappresenta con la notazione $B—A$. Un vettore determina la posizione di un punto B rispetto a quella di un altro punto A.

Due vettori si dicono eguali se hanno eguale il modulo (grandezza del segmento), la direzione ed il senso. È quindi:

$$B - A = -(A - B).$$

Se a è un vettore e poniamo:

$$B - A = a, \qquad B = A + a,$$

esprimiamo che B è l'estremo di un vettore a la cui origine è A.

Si può dunque dire:

La differenza di due punti è un vettore; la somma di un punto e di un vettore è un punto.

Somma o risultante di più vettori è il lato di chiusa di una spezzata poligona la cui origine è un punto qualunque O e i cui lati successivi sono eguali ai vettori.

È da notare che tale somma gode dei due principii *commutativo ed associativo*; e che inoltre:

$$C - B + A - C + B - A = 0.$$

Prodotto di un vettore per un numero reale m è un vettore avente la stessa direzione e lo stesso senso o il senso contrario, secondo che m è positivo o negativo, e il cui modulo è eguale a quello del primo moltiplicato per m.

Moltiplicando un vettore per un numero reale

si ha un vettore parallelo al primo: oppure, dati due vettori paralleli a e b esiste un numero reale m, tale che

$$a = m b.$$

Prodotto interno o scalare di due vettori è il prodotto dei moduli e del coseno dell'angolo dei vettori. È una grandezza scalare espressa ancora dal prodotto del modulo di uno dei due vettori per la proiezione dell'altro sul primo. Sussiste il principio commutativo; se poi poniamo che a sia la somma di a_1, a_2, ... e proiettiamo su b, la proiezione di a è la somma di quelle di $a_1, a_2, \ldots$; moltiplicando queste proiezioni pel modulo di b, risulta che il prodotto interno della somma è eguale alla somma dei singoli prodotti interni; cioè vale il principio *distributivo*.

Prodotto esterno o bivettore è rappresentato in grandezza e senso dall'area del parallelogrammo che ha per lati adiacenti i due vettori.

Così $(B - A)(C - A)$ è rappresentato dall'area del parallelogrammo i cui vertici sono A, B, $B + C$, presa positiva se la rotazione (minima) del vettore $B - A$ per coincidere con $C - A$ ha luogo nel senso del moto delle lancette di un orologio. Il bivettore $(C - A)(B - A)$ è rappresentato dalla stessa area, ma con segno opposto; il prodotto esterno non gode del principio commutativo. Il bivettore è nullo se i due vettori sono parallelli.

Il *modulo* del bivettore è espresso dal numero, positivo o nullo, che misura l'area suddetta.

Indice di un bivettore o prodotto vettoriale di due vettori a, b è un terzo vettore u normale al piano a, b il cui modulo è uguale al modulo del bivettore ab e diretto in modo che il triedro a, b, u sia *destrogiro*; cioè un osservatore coi piedi nell'origine e colla testa nell'estremo di u deve avere a alla sua sinistra e b alla sua destra.

Esso si rappresenta con

$$u = |ab$$

ed è una grandezza vettoriale. Non sussiste il principio commutativo; ed è:

$$|ab = -|ba.$$

Sussiste la legge distributiva, cioè

$$|(a_1 + a_2 + \cdots)b = |a_1 b + |a_2 b + \cdots.$$

Infatti proiettiamo a_1, a_2, ... su di un piano normale al vettore b; la proiezione della somma di a_1, a_2, ... sarà la somma delle proiezioni.

Alteriamo queste nel rapporto di 1 a b e poi facciamole ruotare in uno stesso opportuno senso di 90° sul piano; con queste due operazioni otterremo $|a_1 b$, $|a_2 b$, ... e $|(a_1 + a_2 + \cdots)b$; e sarà vera la relazione scritta.

Inversamente si dice che *ab è l'indice di u*; e si scrive $ab = |u$;
l'indice di un vettore (bivettore) è un bivettore (vettore).

Se m è un numero, abbiamo

$$|ma = m|a,$$

in cui a è un vettore o un bivettore.

Prodotto di tre vettori o trivettore è rappresentato dal volume del parallelepipedo che ha per spigoli adiacenti i tre vettori, riguardato positivo o negativo secondo che il triedro a, b, c è destrogiro o no.

Il trivettore è nullo se i tre vettori sono complanari.

Siamo ora in grado di dire del modo semplice con cui può indicarsi il prodotto scalare di due vettori a e b.

L'indice di b sia il bivettore cd e consideriamo il trivettore acd; esso è dato dal volume del parallelepipedo avente per base il parallelogrammo cd e per altezza la proiezione di a sulla normale al piano cd cioè su b. Quindi

$$a|b = acd = \text{area}\, cd \,.\, \text{mod}\, a \,.\, \cos(a,\ b)$$

ma :

$$\text{mod}\, b = \text{area}\, cd,$$

dunque il prodotto scalare di a e b può essere accennato con $a|b$.

§ 2. **Rappresentazione di un vettore mediante tre altri. Vettori fondamentali.** — Siano I, J, K tre vettori non complanari; $P - O$ un altro vettore qualunque.

Se $P - O$ non è parallelo al piano di due qualunque dei tre vettori, esso può considerarsi

come somma di tre altri eguali agli spigoli di un parallelepipedo, la cui diagonale è $P - O$, e paralleli ai tre vettori. Ognuno di questi tre è espresso da xI, yJ, zK, essendo x, y, z tre numeri (positivi o negativi) eguali al rapporto dei moduli dei vettori ai moduli di I, J, K. Quindi

(1) $$P - O = xI + yJ + zK.$$

Se $P - O$ è, p. es., parallelo al piano di I e J, ripetendo analogo ragionamento si otterrà:

$$P - O = xI + yJ;$$

e se è parallelo ad uno dei vettori, p. es. I, sarà

$$P - O = xI.$$

Un vettore qualunque è una funzione lineare omogenea di altri tre non complanari. I tre numeri x, y, z, positivi, negativi o nulli, perfettamente determinati, si dicono le coordinate del punto P nel sistema $O(I, J, K)$; coincidono colle ordinarie coordinate cartesiane se i moduli di I, J, K sono uguali ad 1.

Tre vettori unità ortogonali I, J, K disposti in ordine destrogiro diconsi *fondamentali*.

§ 3. **Proprietà dei vettori fondamentali.** — Dalle precedenti definizioni risulta:

(2) $I|I = 1$; ecc. $J|K = 0$; ecc.

(3) $|II = 0$; ecc. $|JK = I$; ecc.

Di qui seguono alcune notevoli espressioni pel prodotto scalare e vettoriale. Sia a un vettore; a_1, a_2, a_3 le sue proiezioni secondo gli assi;

$$a = a_1 I + a_2 J + a_3 K$$

e però:

$$a|a = (\text{mod.} a)^2 = (a_1 I + a_2 J + a_3 K)|(a_1 I + a_2 J + a_3 K)$$
$$= a_1^2 I|I + \cdots + a_2 a_3 J|K + \cdots$$

(4) $$a|a = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 .$$

Posto ancora:

$$b = b_1 I + b_2 J + b_3 K$$

collo stesso procedimento risulta

(5) $$a|b = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 ;$$

mentre

$$|ab = a_1 b_1 |II + \cdots + a_2 b_3 |JK + a_3 b_2 |KJ + \cdots$$
$$|ab = (a_2 b_3 - a_3 b_2) I + (a_3 b_1 - a_1 b_3) J + (a_1 b_2 - a_2 b_1) K$$

ed infine:

(6) $$|ab = \begin{vmatrix} I & J & K \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} .$$

§ 4. **Vettori in un piano.**

a) Sia I un vettore unità in un piano; con $J = iI$ $(i = \sqrt{-1})$ intendiamo il vettore I ruotato di un angolo retto nel senso delle rotazioni positive. Se $P - O$ è un vettore dello stesso piano e che forma con I un angolo φ, sarà:

$$P - O = I \rho \cos \varphi + J \rho \operatorname{sen} \varphi,$$
$$P - O = \rho I (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \rho e^{i\varphi} I,$$

dove ρ è il modulo di $P - O$; in conseguenza

(7) $$P = O + \rho e^{i\varphi} I.$$

Se φ varia tra O e 2π, il punto P descrive un cerchio di centro O e di raggio ρ: la (7) chiamasi *equazione vettoriale del cerchio.*

b) Se I ed J sono due vettori non paralleli ed $f(u)$ e $\varphi(u)$ due funzioni di una variabile u, posto

$$(8) \qquad P = O + If(u) + J\varphi(u)$$

veniamo ad esprimere che il vettore $P - O$, comunque vari u, è sempre parallelo ad I e J; abbiamo dunque l'equazione vettoriale di un piano condotto per O parallelamente ad I e J. Se I ed J sono paralleli, la (8) si riduce a

$$(9) \qquad P = O + If(u);$$

equazione di una retta condotta per O parallela ad I.

c) Se x, y è un sistema d'assi qualunque, un punto di coordinate

$$a \cos \varphi, \qquad b \operatorname{sen} \varphi,$$

col variare di φ, descrive una ellissi di cui a e b sono due semi-diametri coniugati diretti secondo x e y. Quindi

$$(10) \qquad P - O = a \cos \varphi \,.\, I + b \operatorname{sen} \varphi \,.\, J,$$

in cui I ed J sono due vettori unità, è l'*equazione di una ellissi* di cui a e b sono due diametri coniugati paralleli ad I e J.

d) Nelle stesse ipotesi, posto

$$(11) \qquad P - O = auI + bu^2 J$$

(u variabile), essendo x ed y le coordinate di P nel sistema $O(I, J)$, avremo

$$x = au, \qquad y = bu^2.$$

Il punto P descrive la parabola

$$x^2 = \frac{a^2}{b} y$$

riferita al diametro J ed alla tangente al vertice I e il cui parametro è $a^2 : 2b$.

§ 5. **Derivate di un vettore.** — Se ad ogni valore di una variabile t, compresa tra limiti determinati, corrisponde una unica posizione di un punto P, si dirà P funzione di t e si accennerà con $P(t)$. I parametri che fissano la posizione di P (coordinate cartesiane, polari, ecc.) saranno pure funzioni di t.

Si può, con tal convenzione, definire al modo solito la *derivata prima, seconda,* ecc. del punto P. Se t_1 è un altro valore di t, la differenza $P(t_1)—P(t)$ è un vettore e può sempre determinarsi un altro vettore a, tale che

$$P(t_1) - P(t) = (t_1 - t) a ;$$

dunque *la derivata di un punto è un vettore.*

Un vettore essendo la differenza di due punti, la derivata di un vettore è anche un vettore; in generale: *le derivate di un punto o di un vettore sono vettori.*

Dalla (1) e nella ipotesi che il sistema $O(I, J, K)$ sia *indipendente* da t, risulta che:

Le derivate di un vettore hanno per coordinate le derivate delle coordinate del vettore.

Valgono i teoremi sulla derivata di una somma, di una costante, ecc.

I prodotti scalari e vettoriali si derivano pure colle note regole.

Infatti la (5) ci dà, indicando le derivate colla lettera D,

$$D(a|b) = a_1 D b_1 + \cdots + b_1 D a_1 + \cdots$$

cioè

$$D(a|b) = a|Db + b|Da, \tag{12}$$

perchè appunto il vettore Db ha per coordinate Db_1, ecc.

Dalla (6), collo stesso metodo, si trae

$$D(|ab) = |Da \,.\, b + |a \,.\, Db\,; \tag{13}$$

si baderà all'ordine dei fattori.

Quanto alla derivata di un bivettore, abbiamo

$$D(ab) = a \,.\, Db + Da \,.\, b. \tag{14}$$

Se indichiamo con c il bivettore ab, le precedenti ci dànno

$$D(|c) = |Dc\,; \tag{15}$$

se invece accenniamo con c il vettore il cui indice è ab, il secondo membro di (14) esprime $D(|c)$; mentre dalla (13), cioè

$$D(c) = |Da \,.\, b + |a \,.\, Db,$$

risulta inversamente che

$$Da \,.\, b + a \,.\, Db = |D(c)\,;$$

quindi la (15) è pur valida per un vettore. Si può quindi concludere che nei calcoli il simbolo | figura come un coefficiente costante.

§ 6. **Alcune applicazioni alle curve piane e gobbe.** — Un punto P di una curva è funzione

dell'arco s contato a partire da una certa origine e in un determinato senso. La derivata prima del punto P rispetto l'arco è un vettore parallelo alla tangente alla curva in P; la derivata seconda è un vettore parallelo al piano osculatore; le accenneremo con $\dot{P}$ e $\ddot{P}$. L'elemento d'arco è poi espresso da

$$ds = \text{mod}\,.\,dP.$$

Poniamo:

$$T = \dot{P}; \tag{16}$$

T è un vettore unità (mod. T=mod. dP: mod. ds=1) *parallelo alla tangente in P, diretto nel senso degli archi crescenti.*

Poichè

$$(\text{mod.}\, T)^2 = 1$$

derivando risulta

$$T|\dot{T} = 0; \tag{17}$$

cioè i due vettori T e $\dot{T}$ sono ortogonali.

Supponiamo $\dot{T}$ diverso da zero e poniamo

$$N = \rho\, \dot{T}, \tag{18}$$

essendo ρ un numero positivo eguale all'inverso del modulo di $\dot{T}$; ρ dicesi raggio di curvatura nel punto P; è N un vettore unità parallelo al piano osculatore, e normale a T; quindi parallelo alla normale principale. Il punto

$$Q = P + \rho N$$

situato sulla normale principale è il centro di curvatura relativo a P; dunque N è un vettore unità

parallelo alla normale principale e diretto verso il centro di curvatura di P.

Poniamo finalmente

$$B = |T N ; \tag{19}$$

B è un vettore unità parallelo alla binormale, diretto in modo che la terna T, N, B risulti destrogira. Supponiamo $\dot{B}$ diverso da zero; dalla

$$B|T = 0$$

si deduce, derivando e tenendo presente la (18),

$$\dot{B}|T + \frac{1}{\rho} B|N = 0 ,$$

cioè

$$\dot{B}|T = 0;$$

ed essendo $\dot{B}$ normale a B, risulterà parallelo ad N; possiamo dunque porre

$$\dot{B} = \frac{1}{\tau} N, \tag{20}$$

τ essendo un numero positivo o negativo, detto *raggio di torsione*.

Sussiste ora il teorema di FRENET: *Le derivate rispetto l'arco dei tre vettori fondamentali* T, N, B, *si esprimono mediante i tre vettori,* ρ e τ.

La (18) e (20) esprimono il teorema per i due vettori T, B.

Derivando la

$$N = |B T$$

risulta

$$\dot{N} = \frac{1}{\rho}\Big|B N + \frac{1}{\tau}\Big|N T$$

$$(21) \qquad \dot{N} = -\frac{1}{\rho} T - \frac{1}{\tau} B.$$

Se $\dot{T} = 0$, sarà T costante ed eguale ad I; e di seguito

$$\dot{P} = I, \qquad P = P_0 + s I;$$

il punto P descrive (§ 4, b) una retta condotta per P_0 parallelamente ad I. In questo solo caso la curvatura è nulla.

Se è nulla sempre la torsione, $\dot{B} = 0$; e quindi

$$B = \text{cost.} = K;$$

ma osservando che

$$\frac{d}{ds}[(P - P_0)|B] = T|B = 0,$$

integrando risulta

$$(P - P_0)|K = \text{cost.}$$

La costante è nulla per $P = P_0$; onde il vettore $P - P_0$ essendo normale ad un vettore costante, la curva è contenuta in un piano per P_0 e normale a K. La torsione è nulla per le sole curve piane.

Se, come spesso avviene, P è funzione di un altro parametro φ, accennando con P', P'', ... le derivate rispetto a φ, otterremo

$$P' = T\frac{ds}{d\varphi};$$

dunque il vettore P' è parallelo alla tangente ed ha per modulo il modulo di $\frac{ds}{d\varphi}$. Inoltre, tenendo

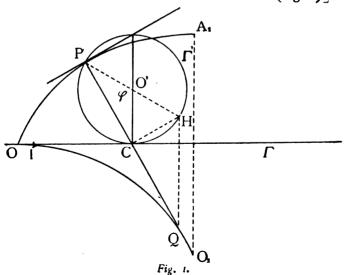
presente la (18),

$$P'' = \frac{d^2 s}{d\varphi^2} T + \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2 N;$$

P'' è un vettore parallelo al piano osculatore e le cui componenti secondo T e N sono $\frac{d^2 s}{d\varphi^2}$ e $\frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{d\varphi}\right)^2$. Quindi:

(22) mod. comp. normale $P'' = \frac{1}{\rho}$ (mod. P')^2.

Applichiamo le considerazioni precedenti alla cicloide, una delle più interessanti curve meccaniche. È generata da un punto P di un cerchio che rotola senza strisciare su di una retta. Sia (Fig. 1)

Fig. 1.

O la posizione iniziale del punto, P quella in cui il cerchio O' tocca la retta in C; sarà OC $=$ arco $CP = a\varphi$, se a è il raggio, φ l'angolo $CO'P$.

Sia infine I un vettore unità posto sulla retta. Abbiamo

$$P - O = C - O + O' - C + P - O'$$

e successivamente:

$$C - O = a\varphi I, \qquad O' - C = a i I,$$

$$P - O' = a e^{\left(\frac{3\pi}{2} - \varphi\right) i} I = - a e^{-i\varphi} i I;$$

onde risulta l'equazione vettoriale della cicloide:

$$(23) \qquad P - O = a\varphi I + a i I - a e^{-i\varphi} i I.$$

Derivando rispetto a φ si ha

$P' = a I - a e^{-i\varphi} I$

$iP' = aiI - ae^{-i\varphi} iI = O' - C + P - O' = P - C$;

la normale coincide col vettore $P - C$.

Inoltre

$$P'' = a e^{-i\varphi} i I = O' - P$$

$$\text{mod. comp. normale } P'' = \tfrac{1}{2} \operatorname{mod}(P - C)$$

e la (22) ci dà

$$\rho = 2 \operatorname{mod}(P - C);$$

il raggio di curvatura è doppio della normale geometrica.

Il centro di curvatura Q è dato da

$$Q = P + \rho N = P + 2(C - P);$$

sostituendo i valori di P e di C, e riducendo:

$$Q = O + a\varphi I - a i I + a e^{-i\varphi} i I;$$

detto O_1 il punto Q corrispondente a $\varphi = \pi$, cioè al punto più alto della cicloide, si ha, posto $\varphi - \pi = \varphi_1$:

$$Q = O_1 + a\varphi_1 I + a i I - a e^{-i\varphi_1} i I,$$

la quale, paragonata colla (23), esprime che *l'evoluta di una cicloide è una cicloide eguale la cui origine è spostata.*

§ 7. **Vettori applicati o localizzati; sistemi di vettori.** — In Meccanica occorre considerare più specialmente dei vettori applicati o localizzati in certi punti; cioè occorre riguardare un vettore come funzione dei punti dello spazio, e vettori applicati ad un numero (discreto o infinito) di punti e costituenti ciò che rispettivamente dicesi un *sistema di vettori o un campo vettoriale.*

Sia $P - A$ un vettore applicato in A, ed O un altro punto qualunque.

Diremo *momento del vettore rispetto al punto* O il prodotto vettoriale $M - O$ di $A - O$ e $P - A$, cioè

$$M - O = |(A - O)(P - A). \tag{24}$$

Tale momento non dipende dalla posizione del vettore sulla sua retta ed è nullo se O giace sul vettore.

Se $P_1 - A_1$, $P_2 - A_2$, ... è un sistema di vettori, il vettore somma applicato in O e la somma dei momenti $M_1 - O$, $M_2 - O$, ... dei singoli vettori diconsi rispettivamente *vettore e momento*

risultante del sistema rispetto al punto O (origine). Si porrà

$$(25)\quad \begin{cases} P - O = P_1 - A_1 + P_2 - A_2 + \cdots \\ M - O = M_1 - O + M_2 - O + \cdots. \end{cases}$$

Essi diconsi anche *coordinate del sistema rispetto all'origine O*.

Due sistemi di vettori aventi le stesse coordinate rispetto ad una stessa origine (e quindi, come vedremo, rispetto a qualunque altra) si dicono *equivalenti.*

Un sistema contenente i vettori di due o più sistemi dicesi *risultante* di questi e le sue coordinate sono le somme o risultanti delle coordinate dei singoli sistemi.

Scegliamo una nuova origine O'; *il vettore risultante non varia; ma varia il momento risultante.* Infatti:

$$A_r - O = A_r - O' + O' - O$$

quindi

$$|(A_r - O)(P_r - A_r) = |(A_r - O')(P_r - A_r) + |(O' - O)(P_r - A_r);$$

sommando le equazioni analoghe, risulta

$$(26)\quad M - O = M' - O' + |(O' - O)(P - O).$$

Il momento risultante non varia se

$$|(O' - O)(P - O) = 0,$$

cioè se l'origine O' si sposta sul vettore risultante.

Dalla (26), ponendo per simmetria $P' - O' = P - O$, si ha, moltiplicando scalarmente per

$P - O$,

$$(M - O)|(P - O) = (M' - O')|(P' - O'):$$

il prodotto scalare del momento e del vettore risultante è costante. Tale prodotto invariante dicesi automomento del sistema e lo indicheremo con V; siccome il vettore risultante è costante, la proiezione del momento sul vettore risultante è pure costante. Sistemi equivalenti hanno lo stesso automomento.

Se V è nullo, $M - O$ è normale a $P - O$ qualunque sia l'origine e reciprocamente.

Cerchiamo se può determinarsi una origine O' tale che il momento risultante sia nullo; dovrà in tale ipotesi essere, dalla (26),

$$M - O = |(O' - O)(P - O);$$

$M - O$ è in conseguenza normale a $P - O$. Soddisfatta tale condizione si può determinare una parallela alla $P - O$ e sulla quale deve trovarsi O'; dunque: *se l'invariante è nullo il sistema ammette un solo vettore risultante, e reciprocamente.*

Vediamo un significato dell'automomento. Supponiamo anzitutto il sistema ridotto a due soli vettori $P_1 - A_1$, $P_2 - A_2$ e scelto A_1 per origine. Quindi

$$P - A_1 = P_1 - A_1 + P_2 - A_2$$
$$M - A_1 = |(A_2 - A_1)(P_2 - A_2),$$

essendo nullo il momento di $P_1 - A_1$. Di qui deduciamo

$$(P - A_1)|(M - A_1) = (P_1 - A_1)|(M - A_1)$$
$$+ (P_2 - A_2)|(M - A_1);$$

ma l'ultimo prodotto, essendo $M - A_1$ normale a $P_2 - A_2$, è nullo; inoltre

$$|(M - A_1) = (A_2 - A_1)(P_2 - A_2);$$

dunque

$$(P - A_1)|(M - A_1) = (A_2 - A_1)(P_2 - A_2)(P_1 - A_1).$$

Il secondo membro esprime il volume del parallelepipedo i cui tre spigoli sono $A_2 - A_1$, $P_2 - A_2$, $P_1 - A_1$, col segno positivo o negativo secondo che la terna suddetta, in quel determinato ordine, è destrogira o no.

Tale volume è anche espresso dal sestuplo volume del tetraedro che ha per spigoli opposti i due vettori ed il cui segno, in conformità alla fatta convenzione, può essere determinato anche con questa regola.

Un piano passi per $P_1 - A_1$ ed A_2; si faccia scorrere A_2 su $P_2 - A_2$; se un osservatore coi piedi in A_1 e la testa in P_1 vede il moto di questo piano avvenire come quello delle lancette di un orologio, il tetraedro va calcolato col segno positivo; in caso contrario col segno negativo.

In un sistema di più vettori considereremo, pel calcolo di V, i vettori due a due: dunque *l'automomento di un sistema è la somma algebrica dei sestupli volumi dei tetraedri aventi per spigoli opposti due vettori, ogni volume considerato col proprio segno.*

§ 8. **Coppia.** — Un sistema il cui vettore risultante è nullo dicesi coppia. La (26) diventa in tal caso

$$M - O = M' - O';$$

il momento risultante del sistema è lo stesso qualunque sia l'origine e dicesi *momento o asse della coppia.*

Un sistema di due vettori eguali, paralleli e di senso contrario è il più semplice esempio di coppia. Data una coppia il cui momento è $M - O$, si possono determinare due siffatti vettori costituenti una coppia equivalente o dello stesso momento?

Siano $P_1 - A_1$ e $P_2 - A_2$ questi due vettori da determinare; e si ponga l'origine in A_1; il momento di $P_2 - A_2$ rispetto ad A_1 deve risultare eguale ad $M - O$; quindi i due vettori debbono giacere in un piano normale ad $M - O$ e formare un parallelogrammo la cui area, in valore e segno, è eguale ad $M - O$. Queste condizioni non individuano i due vettori: *una coppia è equivalente ad infiniti sistemi di due vettori eguali, paralleli e di senso contrario, contenuti in piani normali all'asse della coppia e formanti un parallelogrammo la cui area è eguale in valore e segno al momento.*

Risulta ancora che

la risultante di più coppie è una coppia il cui momento è la somma dei momenti delle coppie singole.

§ 9. Vettore e coppia risultante; asse centrale di un sistema di vettori.—Se il sistema dato non è una coppia e non è equivalente ad un vettore unico, il sistema costituito dal vettore risultante e da una coppia di momento eguale al momento risultante è equivalente al sistema: onde *un sistema di vettori è, in infiniti modi, equivalente al sistema costituito da una coppia e da un vettore.*

In generale è diverso da zero il bivettore $(M - O)(P - O)$. Esiste però una origine O' per cui tale bivettore è nullo, cioè una origine O' tale che

$$M' - O' = k(P - O).$$

Per una tale origine momento e vettore risultante sono paralleli; il momento coincide colla sua proiezione sul vettore risultante (che al pari di V è invariante); dunque il momento acquista il suo valore minimo.

Nella (26) poniamo

$$S - O = |(O' - O)(P - O); \tag{27}$$

risulta

$$M - O = k(P - O) + S - O,$$

la quale esprime che il vettore $S - O$ giace nel piano $M - O$, $P - O$ ed è la componente di $M - O$ secondo la normale a $P - O$; dunque $S - O$ è pienamente determinato, e quindi, nel piano normale in O alla $S - O$, risulterà pure determinata una retta parallela a $P - O$ per tutti

i punti O' della quale è soddisfatta la (27), e quindi la condizione richiesta.

Tale retta è unica: se infatti ne esistesse un'altra, sempre parallela al vettore risultante, dovremmo avere

$$M' - O' = M'' - O'', \quad P' - O' = P'' - O''$$
$$M' - O' = M'' - O'' + |(O'' - O')(P' - O');$$

dunque:

$$|(O'' - O')(P' - O') = 0.$$

O'' perciò deve cadere sulla direzione $P' - O'$ della prima.

Tale retta unica dicesi *asse centrale del sistema*.

§ 10. **Vettori riferiti ad assi ortogonali.**—È utile riferire il sistema di vettori ad assi ortogonali $O(I, J, K)$; e quindi sostituire ad un vettore qualunque del sistema le sue componenti o proiezioni secondo gli assi, e le componenti del suo momento rispetto ad O. Se r è il modulo del vettore $P - A$; x, y, z le coordinate dell'origine A; α, β, γ i coseni direttori; le componenti del vettore sono espresse da $r\alpha, r\beta, r\gamma$. Inoltre

$$A - O = xI + yJ + zK$$
$$P - A = r(\alpha I + \beta J + \gamma K)$$

e quindi, per la (24),

$$M - O = r[(\gamma y - \beta z)I + (\alpha z - \gamma x)J + (\beta x - \alpha y)K];$$

le componenti del momento sono

$$r\lambda, \quad r\mu, \quad r\nu$$

in cui

(28) $\lambda = \gamma y - \beta z, \ \mu = \alpha z - \gamma x, \ \nu = \beta x - \alpha y.$
Si noti che è
(29) $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1, \quad \alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu = 0.$

Le sei quantità $r\alpha$, $r\beta$, ... $r\nu$ individuano la grandezza del vettore e la retta che ne è il sostegno; diconsi le *coordinate omogenee del vettore*. Le α, β, ... ν, tra le quali intercedono le due relazioni (29), rappresentano le coordinate di un vettore unità posto sulla retta e diconsi *coordinate omogenee della retta.*

Per un sistema di vettori si ponga

$$P_s - A_s = r_s(\alpha_s I + \beta_s J + \gamma_s K),$$
$$M_s - A_s = r_s(\lambda_s I + \mu_s J + \nu_s K);$$

e pel vettore e momento risultante

$$P - O = R_x I + R_y J + R_z K$$
$$M - O = M_x I + M_y J + M_z K.$$

Poichè

$$P - O = \sum P_s - A_s; \quad M - O = \sum M_s - A_s,$$

otterremo

$$(30)\ \begin{cases} R_x = \sum r_s\alpha_s, & R_y = \sum r_s\beta_s, & R_z = \sum r_s\gamma_s, \\ M_x = \sum r_s\lambda_s, & M_y = \sum r_s\mu_s, & M_z = \sum r_s\nu_s. \end{cases}$$

Le R_x, R_y, ... M_z, cioè le componenti del vettore e del momento risultante, o coordinate del sistema secondo gli assi, sono le somme algebriche delle coordinate dei singoli vettori.

L'invariante del sistema è espresso da

(31) $V = R_x M_x + R_y M_y + R_z M_z.$

Si possono determinare infiniti sistemi di due

vettori equivalenti al sistema dato; per questi vettori infatti dovremo avere

$$(32)\begin{cases} r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2 = R_x, \quad r_1\beta_1 + r_2\beta_2 = R_y, \\ \qquad r_1\gamma_1 + r_2\gamma_2 = R_z. \\ r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2 = M_x, \quad r_1\mu_1 + r_2\mu_2 = M_y, \\ \qquad r_1\nu_1 + r_2\nu_2 = M_z; \end{cases}$$

sistema di sole sei equazioni tra le dieci incognite r_1, r_2, α_1, ... ν_2.

In qualunque modo si effettui la riduzione, è chiaro che il volume del tetraedro avente per spigoli opposti i due vettori è costante. Data la direzione di uno dei due vettori, cioè date le α_1, β_1, ... ν_1, dalle (31) e (32) ricaviamo, tenendo presenti le relazioni (29),

$$(33)\begin{cases} V = \sum (r_1\alpha_1 + r_2\alpha_2)(r_1\lambda_1 + r_2\lambda_2) \\ \quad = r_1 r_2(\alpha_1\lambda_2 + \beta_1\mu_2 + \cdots + \gamma_2\nu_1), \end{cases}$$

$$\alpha_1 M_x + \beta_1 M_y + \gamma_1 M_z + \lambda_1 R_x + \mu_1 R_y + \nu_1 R_z$$
$$= r_2(\alpha_1\lambda_2 + \beta_1\mu_2 + \cdots + \gamma_2\nu_1).$$

Da queste due si ricava il valore di r_1, purchè il primo membro della seconda sia diverso da zero; allora le (32) determinano le restanti incognite.

Dalla prima inoltre risulta una semplice espressione del sestuplo volume del tetraedro di due vettori, che rappresenteremo con $[r_1, r_2]$.

Se $r_1 = r_2 = 1$, ed inoltre r_2 coincide coll'asse delle x, si ha

$$\alpha_2 = 1, \quad \beta_2 = \gamma_2 = \lambda_2 = \mu_2 = \nu_2 = 0;$$

il sestuplo volume del loro tetraedro si riduce a λ_1; dunque λ_1, μ_1, ν_1 sono rispettivamente i sestupli volumi dei tetraedri aventi per spigoli opposti un segmento eguale ad 1 sulla retta, e uno eguale sugli assi x, y, z.

Se quindi una retta incontra l'asse x, a distanza finita od infinita, sarà $\lambda = 0$ e reciprocamente.

Dato un vettore $r(\alpha, \beta, \ldots \nu)$ ed un asse di coordinate $(a, b, \ldots n)$ dicesi *momento del vettore rispetto l'asse* il sestuplo volume del tetraedro avente per spigoli opposti il vettore ed un segmento eguale ad uno sull'asse, calcolato col segno conveniente. L'espressione di tal momento è

$$r(\alpha l + \beta m + \gamma n + \lambda a + \mu b + \nu c).$$

Quindi le componenti $r\lambda$, $r\mu$, $r\nu$ del momento di un vettore rispetto ad un punto O sono anche i momenti del vettore secondo gli assi.

Rispetto ad una nuova terna parallela alla prima e la cui origine ha le coordinate ξ, η, ζ, diciamo R_x, R_y, R_z, M'_x, M'_y, M'_z le coordinate del sistema. Notando che, per la (6),

$$|(O' - O)(P - O) = (\eta R_z - \zeta R_y) I + \cdots,$$

dalla (26) deduciamo

$$(34) \qquad \begin{cases} M_x = M'_x + \eta R_z - \zeta R_y \\ M_y = M'_y + \zeta R_x - \xi R_z \\ M_z = M'_z + \xi R_y - \eta R_x . \end{cases}$$

Per i punti dell'asse centrale è

$$M' - O' = k(P - O);$$

cioè:

$$M'_x = k R_x, \quad M'_y = k R_y, \quad M'_z = k R_z.$$

Eliminando k otteniamo le equazioni dell'asse centrale:

$$\frac{M_x + \zeta R_y - \eta R_z}{R_x} = \frac{M_y + \xi R_z - \zeta R_x}{R_y} = \frac{M_z + \eta R_x - \xi R_y}{R_z}.$$

Esercizi.

1. Determinare l'equazione vettoriale di una epicicloide e studiare la curva coi metodi del § 6.

Se R ed r sono i raggi dei due cerchi; h la distanza di P dal centro del cerchio mobile r, si ha:

$$P - O = (R + r) e^{i\varphi} I - h e^{i\frac{R+r}{r}\varphi} I.$$

Cambiando r in $-r$, h in $-h$, si ha una ipocicloide.

2. L'epicicloide precedente può anche essere riguardata come una ipocicloide in cui

$$R_1 = \frac{hR}{r}, \quad r_1 = \frac{h(R+r)}{r}, \quad h_1 = R + r.$$

Infatti dalla

$$P_1 - O = (R_1 - r_1) e^{i\varphi_1} I + h_1 e^{-i\frac{R_1 - r_1}{r_1}\varphi_1} I$$

ponendo $\varphi = \frac{r\varphi_1}{R+r}$, si conclude $P_1 = P$.

3. Dimostrare che il quadrato della distanza dell'origine da una retta è

$$\lambda^2 + \mu^2 + \nu^2.$$

L'espressione precedente infatti, cioè

$$(\gamma y - \beta z)^2 + (\alpha z - \gamma x)^2 + (\beta x - \alpha y)^2,$$

è uguale a

$$x^2 + y^2 + z^2 - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2.$$

4. Dimostrare direttamente la formula (33) pel volume del tetraedro di due vettori.

Se x_1, y_1, z_1 è l'origine di r_1, le coordinate del suo estremo sono $x_1 + r_1 \alpha_1$, ecc., e così per l'altro. Il determinante, le cui linee sono le coordinate e l'unità, è l'espressione del chiesto sestuplo volume; sviluppato, si ottiene la (33).

5. Le rette (∞^3) le cui coordinate omogenee soddisfano una equazione omogenea di 1°, 2°, ... grado costituiscono un complesso di 1°, 2°, ... grado. Trovare il luogo delle rette passanti per un punto; l'inviluppo di quelle giacenti in un piano.

Si trova subito che giacciono in un piano, o su un cono di 2° grado, ecc. secondo l'ordine del complesso; ecc.

6. Studiare il complesso quadratico

$$a^2 \alpha \lambda + b^2 \beta \mu + c^2 \gamma \nu = 0,$$

a, b, c essendo costanti.

Vi appartengono le rette dei piani coordinati (e nel piano all'∞): quelle uscenti dall'origine o parallele agli assi. Una retta sega i piani in tre punti; il rapporto delle loro distanze è costante; ecc.

CAPITOLO SECONDO.

VELOCITÀ ED ACCELERAZIONE.

§ 1. **Oggetto della Cinematica.** — Dicesi movimento il variare delle posizioni di una parte dello spazio, rispetto ad un'altra riguardata come fissa, col variare del tempo. La Meccanica si propone lo studio delle leggi e delle cause del movimento. Quella parte poi che si occupa dello studio delle proprietà geometriche del movimento, fatta astrazione dalle cause che lo producono e dai corpi che ne sono animati, dicesi *Cinematica*. Essa si fonda sostanzialmente sui concetti di spazio e di tempo e quindi suol anche definirsi come geometria del movimento o geometria a quattro dimensioni e giova premetterne lo studio a quello della Meccanica propriamente detta *).

*) L'importanza e la convenienza dello studio della Cinematica, da premettersi a quello della Dinamica, furono

§ 2. **Velocità ed accelerazione in un moto rettilineo.**—Un sistema di punti dicesi rigido quando le distanze dei varî punti non cambiano col tempo. Un punto sia in movimento rispetto ad un sistema rigido; ammetteremo che esso si sposti con continuità col variare continuo del tempo (*postulato della continuità del movimento*). Il luogo delle successive posizioni occupate dal punto nello spazio dicesi *traiettoria* del punto. Cominciamo a considerare il caso semplice della traiettoria o del moto rettilineo. Sulla retta traiettoria fissiamo una origine O ed un senso per le distanze; la posizione P del punto mobile all'istante t sarà nota se è nota, in funzione di t, la distanza OP; di guisa che, posto

$$P - O = s,$$

---

riconosciute da d'ALEMBERT, EULER [*Novi Comm. Acad. Petrop.*, **20** (1776); p. 189], KANT (1786), CARNOT [*Essai sur les machines* (1797); *Géométrie de position* (1803), pp. 336-338], WRONSKI [*Syst. archit. absolu*, etc. (1818)] e finalmente da AMPÈRE [*Essai sur la Philos.*, (1834)], al quale è dovuto il nome di Cinematica. LAGRANGE definiva tutta la Meccanica una geometria a quattro dimensioni [*Théorie des fonctions analytiques* (Paris 1813), p. 311].

Fra i trattati recenti si consulti specialmente: KÖNIGS, *Leçons de Cinématique* (Paris 1897); e per una esposizione sintetica: SCHÖNFLIES, *Geometrie der Bewegung*, di cui esiste ancora una traduzione francese (Paris, Gauthier-Villars, 1893); BURMESTER, *Lehrbuch der Kinematik* (Leipzig 1888).

sarà

(1) $$s = f(t),$$

che dicesi equazione finita del moto del punto.

Si suppone stabilita una unità di misura per le lunghezze e per i tempi; nel sistema di misure assolute, che noi seguiremo, esse sono rispettivamente il centimetro ed il secondo di tempo solare medio.

Sia $$s = a + bt,$$

a e b essendo costanti; a è lo spazio tra l'origine e la posizione iniziale del punto (spazio iniziale); b lo spazio percorso in un secondo; inoltre spazî eguali sono percorsi in tempi uguali. Un tal moto dicesi *uniforme*; b è la velocità; cioè:

Nel moto uniforme la velocità è lo spazio percorso in un secondo.

Consideriamo un moto *vario* definito dalla (1) e sia P' la posizione del mobile corrispondente al tempo $t + \tau$, s' lo spazio percorso. Sarà

$$P' - P = f(t + \tau) - f(t) = \tau f'(t) + \tau^2 \varepsilon,$$

supponendo la $f(t)$ derivabile rispetto al tempo.

Parta da P, contemporaneamente al mobile, un altro mobile che con moto uniforme, la cui velocità arbitraria è v, percorra sulla stessa retta e nel tempo τ uno spazio

$$P_1 - P = v\tau.$$

La

$$P' - P_1 = \tau[f'(t) - v] + \tau^2 \varepsilon$$

esprime la differenza tra lo spazio percorso nel tempo τ nel moto vario e nel moto uniforme. Tra gl'infiniti moti uniformi corrispondenti agli infiniti valori di v, quello la cui velocità è $f'(t)$ rende $P' - P_1$ dell'ordine di τ^2, per τ infinitamente piccolo; mentre in ogni altro caso $P' - P_1$ è dell'ordine di τ. Un tal moto differirà dunque meno di ogni altro dal moto vario nel tempo τ; e la sua velocità si assumerà, per definizione, come velocità del moto vario all'istante t:

Nel moto vario rettilineo la velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo, cioè

$$v = \dot{s}. \tag{2}$$

Unità di velocità è la velocità di quel moto uniforme in cui il mobile percorre un centimetro in un secondo; è una unità derivata che varia come la prima potenza dello spazio e come la potenza -1 del tempo: cioè le sue dimensioni sono

$$[l, t^{-1}].$$

Se s, in un certo intervallo, cresce col tempo, v è positivo ed il moto è diretto; se no retrogrado. Se in ogni istante è nota v in funzione di t, integrando la (2) si ha

$$s = a + \int_0^t v(t)\,dt;$$

lo spazio è noto a meno di una costante; che è nota, se è dato lo spazio iniziale.

Consideriamo un altro caso particolare, cioè

un moto definito da

$$(3) \qquad s = a + bt + \frac{1}{2}ct^2;$$

a, b, c sono costanti; inoltre si ha, per la (2),

$$(4) \qquad v = b + ct.$$

Si riconosce dunque che: a è lo spazio iniziale; b è la velocità iniziale; c è la quantità costante di cui si accresce, in un secondo, la velocità.

Il moto si accelera se $c > 0$ e si ritarda se $c < 0$ e in modo uniforme; però il moto definito dalla (3) dicesi *uniformemente accelerato* e c *accelerazione.*

Per estendere ad un moto vario il concetto di accelerazione, si parta come nel caso precedente dalla

$$P' - P = f(t+\tau) - f(t) = \tau f'(t) + \frac{1}{2}\tau^2 f''(t) + \tau^3\varepsilon,$$

supponendo $f(t)$ derivabile due volte.

Parta da P, contemporaneamente al mobile, un altro mobile che si muova di moto uniformemente accelerato; sia v_0 la sua velocità iniziale; c l'accelerazione (entrambe arbitrarie); all'istante $t + \tau$ si trovi in P_1 e

$$P_1 - P = v_0\tau + \frac{1}{2}c\tau^2.$$

Perciò

$$P' - P_1 = \tau[f'(t) - v_0] + \frac{1}{2}\tau^2[f''(t) - c] + \tau^3\varepsilon.$$

Ragionando come prima, si vede che quell'unico moto uniformemente accelerato la cui velocità iniziale (all'istante t) è $f'(t)$, cioè la velocità

del mobile allo stesso istante, e la cui accelerazione è $f''(t)$, differisce, meno di qualunque altro, dal moto vario nel tempuscolo τ.

L'accelerazione di tale moto uniformemente accelerato è, per definizione, l'accelerazione del moto vario. Dunque

Nel moto vario rettilineo l'accelerazione è la derivata seconda dello spazio, o la derivata prima della velocità rispetto al tempo.

La indicheremo con w; quindi

$$w = \ddot{s} = \dot{v}. \tag{5}$$

Unità di accelerazione è l'accelerazione di quel moto uniformemente accelerato in cui la velocità cresce di un centimetro in un secondo.

È una unità derivata le cui dimensioni sono

$$[l, t^{-2}].$$

Cognita w in funzione del tempo, da (5), successivamente avremo

$$v = b + \int_0^t w(t)\,dt$$

$$s = a + bt + \int_0^t dt \int_0^t w(t)\,dt;$$

il moto è dunque definito a meno di un moto uniforme, che risulta determinato se viene assegnata la velocità e lo spazio iniziale.

Se ora fosse s una funzione intera di terzo grado in t, saremmo condotti a considerare una quantità costante di cui, in ogni secondo, si ac-

cresce la accelerazione e che potremmo considerare come un'accelerazione di secondo ordine; la quale, nel caso di un moto vario, sarebbe definita dalla derivata terza dello spazio; e così via di seguito.

La considerazione di queste diverse accelerazioni non ha che un puro interesse geometrico.

Due vettori $\dot{P}$ e $\ddot{P}$ applicati in P e i cui moduli sono rispettivamente v e w daranno la rappresentazione del *vettore velocità ed accelerazione* *.

§ 3. **Velocità ed accelerazione in un moto curvo.** — Supponiamo ora che la traiettoria di un punto mobile P sia curvilinea; la posizione del punto P è funzione del tempo e la rappresenteremo con $P(t)$; tale funzione, generalmente continua, supporremo derivabile due volte.

Le derivate prima e seconda del punto P, o del vettore $P - O$, qualunque sia l'origine O, diconsi rispettivamente velocità ed accelerazione del punto mobile.

Se nel sistema $O(I, J, K)$ fisso, sono $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ le coordinate di P all'istante t, avremo successivamente

$$P - O = xI + yJ + zK,$$
$$\dot{P} = \dot{x}I + \dot{y}J + \dot{z}K,$$
$$\ddot{P} = \ddot{x}I + \ddot{y}J + \ddot{z}K;$$

* In questo modo di esposizione abbiamo seguito: LAGRANGE, *Théorie d. fonc. analy.*, già citata, pag. 312 e seg.

le componenti della velocità e della accelerazione sono rispettivamente le derivate prime e seconde delle coordinate del punto mobile.

Osservando che $\dot{x}$ e $\ddot{x}$ sono la velocità e l'accelerazione della proiezione del punto P sull'asse x, che è affatto arbitrario, si conclude:

La proiezione della velocità (accelerazione) di un punto su di un asse è la velocità (accelerazione) della proiezione del punto sull'asse stesso.

Però $\dot{x}, \ldots$ $\ddot{x}, \ldots$ chiamansi anche velocità ed accelerazioni *componenti* e v, o w, che è la diagonale del parallelepipedo rettangolo i cui lati, paralleli agli assi, sono $\dot{x}, \ldots$ oppure $\ddot{x}, \ldots$ dicesi *velocità* o *accelerazione risultante.*

La velocità ha la direzione della tangente alla traiettoria; positiva o negativa secondo che il moto è diretto o retrogrado.

Detta v la sua grandezza:

$$v^2 = (\text{mod. } \dot{P})^2 = \dot{s}^2\,; \tag{6}$$

la grandezza della velocità è la derivata dello spazio rispetto al tempo.

Nel punto P della traiettoria consideriamo i due vettori T, N (§ 6, Cap. 1°). Si ha

$$\dot{P} = v\,T$$

e

$$\dot{T} = v\frac{dT}{ds} = \frac{v}{\rho}N\,.$$

quindi risulta

$$\ddot{P} = \dot{v}\,T + \frac{v^2}{\rho}N\,. \tag{7}$$

L'accelerazione è contenuta nel piano osculatore alla traiettoria; la sua componente secondo la tangente (accelerazione tangenziale) è $\dot{v}$; *quella secondo la normale (accelerazione normale) è* $\dfrac{v^2}{\rho}$.

L'accelerazione tangenziale ha lo stesso senso o senso contrario di T, se v cresce o decresce col tempo; è nulla se il moto è uniforme e reciprocamente; l'accelerazione normale invece è sempre dello stesso senso di N; cioè è sempre diretta verso il centro di curvatura; è nulla se il moto è rettilineo e reciprocamente.

Poniamo

$$\dot{P} = Q - O, \tag{8}$$

O essendo una origine arbitraria; Q è funzione del tempo ed il suo movimento dicesi *moto odografo*; la sua traiettoria semplicemente *l'odografo* del moto di P. Potremmo ancora considerare l'odografo della prima, seconda, ecc. accelerazione. Poichè

$$\ddot{P} = \dot{Q},$$

la velocità del moto odografo è eguale all'accelerazione del moto curvo.

Nel moto piano o rettilineo l'odografo è una curva piana o una retta; nel moto uniforme è una curva sferica, ecc. *.

---

* La considerazione dell'odografo è dovuta a MÖBIUS, *Die elem. d. Mec. des Himm.* (1843); *Ges. Werke,* **4**, p. 47; e più specialmente ad HAMILTON: Dublin Trans. **3** (1846).

§ 4. **Componenti della velocità ed accelerazione in coordinate polari nel piano.** — Il moto di P abbia luogo in un piano e sia riferito ad un sistema di coordinate polari r, φ; sia I il vettore unità posto sull'asse polare, per modo che

$$P - O = r e^{i\varphi} I. \tag{9}$$

Diciamo R un vettore unità ottenuto da I con una rotazione di φ, ed N un altro ottenuto da R con una rotazione di un angolo retto; sarà

$$R = e^{i\varphi} I, \quad N = i R = i e^{i\varphi} I.$$

Derivando la (9) si ha

$$\dot{P} = \dot{r} e^{i\varphi} I + r \dot{\varphi} e^{i\varphi} i I = \dot{r} R + r \dot{\varphi} N,$$
$$\ddot{P} = (\ddot{r} - r \dot{\varphi}^2) R + (2 \dot{r} \dot{\varphi} + r \ddot{\varphi}) N.$$

Dunque le componenti della velocità ed accelerazione secondo il raggio vettore e la normale al raggio vettore sono date dalle

$$\left\{ \begin{aligned} & v_r = \dot{r}, \quad v_n = r \dot{\varphi}, \\ & w_r = \ddot{r} - r \dot{\varphi}^2, \quad w_n = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} (r^2 \dot{\varphi}). \end{aligned} \right. \tag{10}$$

Se poniamo

$$2 \Phi = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{s}^2 = v^2,$$

si verifica subito che

$$v_r = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}}, \quad r v_n = \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}}$$

$$w_r = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{r}} - \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad r w_n = \frac{d}{dt} \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi}.$$

§ 5. Applicazioni varie dei risultati precedenti; proprietà del moto centrale.

a) Pensando una curva piana come traiettoria di un punto, i risultati precedenti dànno un mezzo semplice per tracciare la tangente in un suo punto. Consideriamo alcuni esempii.

Sia (con φ funzione del tempo) la spirale logaritmica

$$r = a e^{m\varphi}.$$

Quindi

$$v_r = a m e^{m\varphi} \dot{\varphi} = m r \dot{\varphi} = m v_n.$$

Se riportiamo sul raggio vettore e sulla normale (nel senso N) due segmenti rispettivamente eguali ad m ed 1, la diagonale uscente da P del rettangolo così costruito, dà la direzione del moto e quindi la tangente. Il moto di P sulla spirale non essendo determinato, non è determinata la velocità; nè la costruzione della tangente dipende dalla scelta della unità di misura.

Consideriamo le curve i cui punti sono determinati dalle distanze r, r' a due punti fissi O, O'; cioè rappresentate in *coordinate bipolari* da una equazione della forma

$$f(r, r') = 0. \tag{11}$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{\partial f}{\partial r}\dot{r} + \frac{\partial f}{\partial r'}\dot{r}' = 0,$$

cioè

$$v_r : v_{r'} = -\frac{\partial f}{\partial r'} : \frac{\partial f}{\partial r};$$

per ogni punto della curva è noto il rapporto tra le due componenti ortogonali della velocità secondo i raggi vettori: è dunque nota la direzione della velocità e quindi la tangente.

Si può del resto osservare che se α ed α_1 sono gli angoli che la normale in P forma coi due raggi vettori, si ha

$$\operatorname{sen} \alpha : \operatorname{sen} \alpha_1 = \frac{\partial f}{\partial r} : \frac{\partial f}{\partial r'};$$

dunque se a partire da P si riportano sui raggi r ed r' due segmenti proporzionali a $\frac{\partial f}{\partial r}$ e $\frac{\partial f}{\partial r'}$, la diagonale del parallelogrammo costruito su questi segmenti, dà la direzione della normale *.

---

* Il metodo esposto, fondato sul principio della composizione delle velocità, ed uno dei primi escogitati dai geometri del secolo XVII per risolvere il problema delle tangenti, è dovuto a ROBERVAL, *Observations sur la comp. d. mouv.* [Anc. Mém. de l'Acad. des Sciences, VI (1730)]. Nel caso delle coordinate bipolari è notevole che ROBERVAL, ed altri, presero abbaglio costruendo sempre su v_r e $v_{r'}$ un parallelogrammo; ciò non è valido altro che in casi particolari, ed, in generale, soltanto quando le velocità sono eguali o formano un angolo retto. Cfr. memoria di DUHAMEL Mém. Ac. d. Sciences (Savants étrangers) (1834).

La regola semplice relativa alla normale è di POINSOT J. de l'École. Polytech., Cah. 13 (1806), p. 206.

Nel caso delle coniche a centro si ha

$$v_r : v_{r'} = \mp 1,$$

secondo si tratta di una ellissi o di una iperbole; quindi nel primo caso a partire da P su OP e PO' riporteremo due segmenti eguali qualunque e nei loro estremi eleveremo le normali ai raggi; la diagonale, uscente da P, del quadrilatero così costruito è la tangente; la quale, in questo caso particolare, coincide colla diagonale del parallelogrammo costruito sui due segmenti. Per l'iperbole i due segmenti eguali si riporteranno nel senso OP, $O'P$.

b) *Moto di un punto la cui accelerazione ha direzione costante.* Se I è un vettore parallelo alla direzione costante, è

$$\ddot{P} = a I,$$

con a funzione del tempo e che possiamo porre eguale a $\ddot{c}$; integrando

$$\dot{P} = \dot{P}_0 + \dot{c} I,$$
$$P = P_0 + \dot{P}_0 t + c I.$$

Se v_0 è la grandezza della velocità iniziale, parallela ad J, avremo

$$P = P_0 + v_0 t J + c I;$$

questa rappresenta (§ 4, Cap. 1°) un piano parallelo ad I, J; dunque *la traiettoria è piana.* Se inoltre la grandezza dell'accelerazione è costante, sarà $2c = at^2$, e quindi

$$P = P_0 + v_0 t J + \tfrac{1}{2} a t^2 I;$$

la traiettoria è una parabola il cui asse è parallelo ad I, la tangente al vertice parallela ad J e il cui parametro è $v_0^2 : a$.

Inoltre, essendo

$$\dot{P} = v_0 J + a t I,$$

il moto odografo è rettilineo ed uniforme.

c) Dicesi *centrale* quel movimento nel quale l'accelerazione è diretta ad un punto O, centro, che supporremo fisso.

Il piano osculatore della traiettoria, contenendo l'accelerazione, passerà pel punto fisso; *la traiettoria è contenuta in un piano passante pel centro.*

$\ddot{P}$ essendo parallela a $P - O$, poniamo

$$\ddot{P} = m(P - O);$$

e quindi: $\quad |(P - O)\ddot{P} = 0;$

se notiamo che $\quad |\dot{P}^2 = 0$

integrando si trae

$$|(P - O)\dot{P} = \text{cost.} = \alpha,$$

la quale non solo dimostra che la traiettoria è piana, ma ancora che l'area del triangolo O, P, $P + \dot{P}$ è costante per tutta la durata del moto.

Sia S l'area del settore descritto da $P - O$ a partire dalla posizione iniziale $P_0 - O$; p la normale condotta da O sulla tangente.

Il modulo del precedente prodotto vettoriale è costante ed eguale a pv; inoltre

$$2\,dS = p\,ds = p\,v\,dt = c\,dt;$$

quindi $\quad S = \frac{1}{2} c t.$

L'area descritta dal raggio vettore, a partire dalla posizione iniziale, cresce proporzionalmente al tempo; la velocità varia in ragione inversa della distanza del centro dalla tangente; il moto è sempre diretto o retrogrado.

L'espressione di dS in coordinate polari essendo

$$dS = \frac{1}{2} r^2 d\varphi$$

risulta pure

$$r^2 \dot{\varphi} = c; \tag{12}$$

alla quale si giunge pure colla considerazione che $w_n = 0$ e rammentando poscia l'ultima delle (10). Quindi

$$\ddot{P} = (\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) R;$$

ma sulla traiettoria r è funzione di φ; e però

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\varphi}\dot{\varphi} = \frac{c}{r^2}\frac{dr}{d\varphi} = -c\frac{d\frac{1}{r}}{d\varphi},$$

$$\ddot{r} = -c\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}\dot{\varphi} = -\frac{c^2}{r^2}\frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2};$$

sostituendo risulta

$$\ddot{P} = -\frac{c^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2\frac{1}{r}}{d\varphi^2}\right)R. \tag{13}$$

Se è cognita la traiettoria, e quindi r in funzione di φ, con semplici derivazioni si otterrà la grandezza dell'accelerazione; e reciprocamente, se que-

sta è nota per r e φ, integrando la (13) si trova l'equazione della traiettoria. Diamo alcuni esempii.

d) L'accelerazione, diretta verso O, è proporzionale al raggio.

$$\ddot{P} = -\alpha^2 (P - O)$$

(α costante reale). Integrando

$$P - O = A \cos \alpha t + B \operatorname{sen} \alpha t.$$

Sia

$$P_0 - O = r_0 I = A ; \quad \dot{P}_0 = v_0 J = \alpha B ;$$

sostituendo

$$P - O = r_0 \cos \alpha t \, . \, I + \frac{v_0}{\alpha} \operatorname{sen} \alpha t \, . \, J.$$

La traiettoria è una ellissi di centro O e di cui due semidiametri coniugati sono $r_0 I$, $\frac{1}{\alpha} v_0 J$ (§ 4, Cap. I°). Inoltre poichè

$$\dot{P} = - r_0 \alpha \operatorname{sen} \alpha t \, . \, I + v_0 \cos \alpha t \, . \, J,$$

anche l'odografo è una ellissi.

e) L'accelerazione, sempre diretta verso O, sia inversamente proporzionale al quadrato del raggio.

$$\ddot{P} = - \frac{c^2 \alpha^2}{r^2} R$$

(α costante reale); la (13) ci dà subito

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d \varphi^2} + \frac{1}{r} = \alpha^2 .$$

Posto $$y = \frac{1}{r} - \alpha^2$$

si deduce, integrando,

$$y = A \cos \varphi + B \operatorname{sen} \varphi = m \cos (\varphi - \varphi_0),$$

avendo posto

$$A = m \cos \varphi_0, \quad B = m \operatorname{sen} \varphi_0 .$$

Quindi

$$r = \frac{\frac{1}{\alpha^2}}{1 + \frac{m}{\alpha^2} \cos (\varphi - \varphi_0)},$$

equazione di una conica riferita al fuoco. Si può anche osservare che

$$\ddot{P} = -\frac{\alpha^2 c^2}{r^2} e^{i\varphi} I = -\alpha^2 c e^{i\varphi} \dot{\varphi} I,$$

sempre per la (12). Integrando

$$\dot{P} = \text{cost.} + \alpha^2 c e^{i\varphi} i I;$$

di qui, contando gli angoli dal raggio vettore iniziale,

$$\dot{P}_0 = \text{cost.} + \alpha^2 c i I;$$

$$Q = \dot{P} + O = \dot{P}_0 - \alpha^2 c i I + O + \alpha^2 c e^{i\varphi} i I.$$

L'odografo è un cerchio di raggio $\alpha^2 c$.

Da questa proprietà risulta poi, in altro modo, che la traiettoria è una conica. Sia infatti M il piede della normale condotta da O sulla normale in P; Q il punto dell'odografo corrispondente a P; poichè $pv = \text{cost.}$, il luogo di M è la figura inversa di Q, ruotata di $90°$; dunque il luogo di M è un cerchio. Allora la traiettoria di P, essendo l'inviluppo del lato di un angolo retto il cui vertice M descrive un cerchio e l'altro lato passa per

un punto fisso O, è una conica avente O per fuoco.

f) Un punto mobile percorre con moto uniforme un cerchio di centro O e di raggio a; la sua accelerazione è diretta secondo il raggio ed eguale a $\frac{1}{a} v^2$; oppure, se diciamo ω l'angolo descritto in un secondo e riflettiamo che $v = a\omega$, è data da $a\omega^2$.

Il moto della proiezione di P su di un diametro dicesi *armonico*; poichè la sua velocità ed accelerazione sono le proiezioni di quelle di P, si deduce che nel moto armonico il punto effettua periodicamente delle oscillazioni lungo il diametro; la velocità, nulla agli estremi, è massima nel centro; l'accelerazione, diretta verso il centro, ed eguale ad $\omega^2 x$, varia proporzionalmente alla distanza x dal centro. Se τ è il tempo impiegato a percorrere il diametro (*periodo*), metà di quello impiegato da P a percorrere il cerchio, avendosi

$$\tau v = \pi a = a \tau \omega,$$

risulta

$$\tau = \frac{\pi}{\omega}.$$

Se consideriamo sul raggio OP un altro mobile P' che percorre pure con moto uniforme e con velocità v' un cerchio di raggio a', sarà

$$v : a = v' : a' = \omega.$$

Il moto armonico della proiezione di P', sullo

stesso diametro, avrà una diversa ampiezza, ma lo stesso periodo del precedente. I due moti diconsi *isocroni.*

Esercizi.

1. Il moto rettilineo definito da

$$x = a \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right)$$

dicesi armonico: a l'ampiezza, τ il periodo, ε l'epoca. Trovare il moto risultante di due moti armonici di stesso periodo.

Posto:

$r \cos\theta = a \cos\varepsilon + a' \cos\varepsilon'$, $r \operatorname{sen}\theta = a \operatorname{sen}\varepsilon + a' \operatorname{sen}\varepsilon'$,

risulta

$$a \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon\right) + a' \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \varepsilon'\right) = r \cos\left(\frac{2\pi t}{\tau} - \theta\right)$$

$$r^2 = a^2 + a'^2 + 2 a a' \cos \varepsilon \varepsilon'.$$

Il moto risultante è pure armonico; l'ampiezza è la diagonale ecc.

[THOMSON and TAIT, *Treatise on Natural Philosophy* (Cambridge 1896), I, p. 40 e seg.].

2. Comporre due moti armonici ortogonali di eguale ampiezza e i cui periodi stanno tra loro come 1 : 2. Equazione della traiettoria.

Se $x = a \cos(2nt - \varepsilon)$, $y = a \cos nt$, si ha

$$x = a\left[\left(\frac{2y^2}{a^2} - 1\right) \cos\varepsilon + 2\frac{y}{a}\sqrt{1 - \frac{y^2}{a^2}} \operatorname{sen}\varepsilon\right],$$

che rappresenta una curva chiusa: se $\varepsilon = 0$ si ha una parabola.

(THOMSON and TAIT, l. c., p. 51).

3. Un punto P si muove uniformemente su di un cerchio di raggio R il cui centro C si muove di moto rettilineo ed uniforme (oppure su di un altro cerchio); il moto avviene in un piano; trovare la traiettoria.

Se ω è l'angolo descritto da CP in un secondo, la regola della composizione delle velocità ci dà

$$\dot{P} = (a + R\omega e^{i\omega t} i) I$$

se a è la velocità di C; ecc. Si ottengono delle cicloidi od epicicloidi.

(LORIA, l. c., p. 487).

4. Due punti P_1, P_2 si muovono di moto uniforme su due cerchi concentrici; trovare la traiettoria del vertice P del parallelogrammo che ha per lati adiacenti OP_1 e OP_2.

Poichè

$$P - O = P_1 - O + P_2 - O,$$

si ha

$$P - O = (r_1 e^{i\omega_1 t} + r_2 e^{i\omega_2 t}) I,$$

cioè una epicicloide.

Su questa proprietà è fondato un modello per la costruzione delle epicicloidi.

[SCHILLING, Zeitschrift f. Mathem. u. Physik, **44** (1899), p. 214].

5. Un'elica cilindrica circolare, i cui punti sono definiti da

$$x = a\cos\varphi, \quad y = a\,\mathrm{sen}\,\varphi, \quad z = am\varphi,$$

è percorsa da un punto con moto uniforme; determinare l'accelerazione ed il raggio di curvatura.

Si ha

$$v^2 = a^2(1 + m^2)\dot{\varphi}^2 = \text{cost.},$$

quindi φ è una funzione lineare di t. L'accelerazione è tutta normale ed eguale ad $a\dot{\varphi}^2 = \frac{v^2}{\rho}$; donde

$$\rho = a(1 + m^2).$$

6. Nel moto di un punto su di una curva l'accelerazione tangenziale è proporzionale all'arco contato a partire da una origine P_0; studiare il moto.

Si ha

$$\ddot{s} = ks$$

equazione che si sa integrare. Se $k = -\alpha^2$ (α reale), spostando l'origine dei tempi risulta

$$s = a \cos \frac{2\pi t}{\tau};$$

il moto è armonico.

7. Un punto Q si muove su di una retta con velocità costante u; un altro punto P si muove in un piano passante per la retta e con velocità costante v diretta sempre verso Q; traiettoria di P (curva di fuga o del cane o di « poursuite »).

Se O è il punto della retta in cui la velocità è normale e P è in A, si ha:

$$OQ = ut = x - y\frac{dx}{dy}; \quad PA = s = vt;$$

$$\frac{v}{u}s = x - y\frac{dx}{dy} = es, \quad \left(e = \frac{v}{u}\right).$$

Derivando rispetto x:

$$e\sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = -y\frac{d^2x}{dy^2},$$

la quale, posto $z^2 = 1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2$, conduce alla

$$2 \frac{dx}{dy} = \frac{a}{y^e} - \frac{y^e}{a}$$

che s'integra subito. Conviene considerare il caso di $e = 1$ a parte.

(LORIA, l. c., p. 607).

8. La posizione di un punto nello spazio sia riferita ad un sistema di coordinate polari in cui r è il raggio vettore, φ la longitudine e θ la colatitudine. Trovare le componenti della velocità e dell'accelerazione secondo il raggio vettore, la tangente al meridiano e al parallelo.

Siano I, J, K i tre vettori fondamentali relativi al centro; I_1, J_1, K_1 quelli relativi a P diretti secondo il raggio vettore, la tangente al meridiano ed al parallelo nel senso in cui crescono r, θ, φ. Si ha:

$$P - O = r \cos\varphi \operatorname{sen}\theta \,.\, I + r \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta \,.\, J + r \cos\theta \,.\, K$$

$$\dot{P} = \dot{r} I_1 + r\dot{\theta} \,.\, J_1 + r\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta K_1 ;$$

onde:

$$v_r = \dot{r}, \qquad v_\theta = r\dot{\theta}, \qquad v_\varphi = r\dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta.$$

Inoltre

$$\dot{I}_1 = \dot{\varphi} \operatorname{sen}\theta \,.\, K_1 + \dot{\theta} \,.\, J_1 , \qquad \dot{J}_1 = \dot{\varphi} \cos\theta \,.\, K_1 - \dot{\theta} \,.\, I_1$$

$$\dot{K}_1 = - \dot{\varphi}(\operatorname{sen}\theta I_1 + \cos\theta J_1) ;$$

quindi, derivando $\dot{P}$, si hanno per le componenti di w secondo I_1, J_1, K_1 le espressioni

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \operatorname{sen}\theta ; \qquad \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2 \dot{\theta}) - r \operatorname{sen}\theta \cos\theta \dot{\varphi}^2 ,$$

$$\frac{1}{r \operatorname{sen}\theta} \frac{d}{dt}(r^2 \operatorname{sen}^2\theta \dot{\varphi}) ;$$

queste si potrebbero porre sotto la stessa forma delle (10) del § 4.

9. Un punto si muove: in un piano in modo

che $v_r : v_\theta =$ cost.; su di un cono circolare in modo che $v_r : v_\varphi =$ cost.; su di una sfera in modo che $v_\theta : v_\varphi =$ cost. Determinare la traiettoria.

Nei tre casi si ha

$$\frac{dr}{r\,d\theta} = \text{cost.}; \quad \frac{dr}{r \operatorname{sen}\theta\, d\varphi} = \text{cost.}; \quad \frac{d\theta}{\operatorname{sen}\theta\, d\varphi} = \text{cost.};$$

con una integrazione si trova una spirale logaritmica; una lossodromia conica e sferica.

10. Un punto si muove di moto uniforme su di una retta che ruota uniformemente intorno ad un suo punto. Determinare la traiettoria e la tangente.

Basterà esprimere che

$$r = a\,t, \quad \varphi = \omega\,t$$

per ottenere la spirale di ARCHIMEDE

$$r = \frac{a}{\omega}\varphi = k\varphi.$$

Inoltre

$$v_r : v_\theta = k : r$$

dà un mezzo facile per costruire la tangente.

11. Costruire col metodo di ROBERVAL la tangente alla cicloide.

La velocità di P (Fig. 1ª) si decompone in due: una, normale al raggio del cerchio, eguale ad $a\dot{\varphi}$; l'altra parallela ad OC ed eguale a $\dot{C} = a\dot{\varphi}$ e quindi eguale alla prima, ecc.

12. Stesso problema per le curve di CASSINI e per le ovali di CARTESIO, rappresentate rispettivamente in coordinate bipolari da

$$r\,r' = \text{cost.}; \quad a\,r + b\,r' = c.$$

Più semplice riesce l'applicazione della regola di POINSOT per la costruzione della normale. Se i ed i', nel caso delle

ovali, sono gli angoli che la normale forma con r ed r', si ha

$$\text{sen}\, i : \text{sen}\, i' = \text{cost.}$$

Per le prime, le normali nei fuochi ai raggi vettori tagliano sulla tangente parti eguali.

(LORIA, l. c., p. 193; 161).

13. Un punto percorre una spirale logaritmica e la sua accelerazione è diretta al polo. Dimostrare che essa varia in ragione inversa del cubo del raggio vettore.

Posto $r = a e^{m\varphi}$, si applichi subito la formula (13).

14. Stesso problema supponendo che il punto percorra la spirale sinusoide

$$r^k \cos k\varphi = a^k .$$

Si trova subito che

$$\frac{1}{r} + \frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\varphi^2} = \frac{1-k}{a^{2k}} r^{2k-1} ;$$

quindi l'accelerazione varia come la potenza $2k - 3$ del raggio.

15. Trovare le componenti dell'accelerazione di 2°, 3°, ... ordine nel moto di un punto, secondo T, N, B.

Si parta dalla (7); derivando e ricordando le formule di FRENET, si ha

$$\dddot{P} = \left(\ddot{v} - \frac{v^3}{\rho^2}\right) T + \left(3 \frac{v}{\rho} \dot{v} - \frac{v^2}{\rho^2} \dot{\rho}\right) N - \frac{v^3}{\rho\tau} B.$$

In generale, posto

$$P^{(k-1)} = w_t^{(k-1)} T + w_n^{(k-1)} N + w_b^{(k-1)} B,$$

collo stesso procedimento si trova

$$w_t^{(k)} = \dot{w}_t^{(k-1)} - \frac{v}{\rho} w_n^{(k-1)},$$

$$w_n^{(k)} = \dot{w}_n^{(k-1)} + \frac{v}{\rho} w_t^{(k-1)} + \frac{v}{\tau} w_b^{(k-1)},$$

$$w_b^{(k)} = \dot{w}_b^{(k-1)} - \frac{v}{\tau} w_n^{(k-1)}.$$

CAPITOLO TERZO.

ANALISI DEL MOTO FINITO DI UN SISTEMA RIGIDO. COMPOSIZIONE DEI MOTI FINITI.

Nella prima parte di questo capitolo ci proponiamo di risolvere la seguente questione. *Date due diverse posizioni di uno stesso sistema rigido, con quali movimenti semplici si potranno far coincidere tre punti (non disposti in linea retta) della prima, coi loro corrispondenti della seconda e quindi far coincidere le due posizioni?*

I movimenti semplici sono: il *moto di traslazione*, di *rotazione intorno ad un asse* ed *elicoidale*, che passiamo a definire.

§ 1. **Moto di traslazione.** — Siano A ed A_1 due posizioni corrispondenti di uno stesso punto in due diverse posizioni S ed S_1 di uno stesso sistema rigido. Il vettore $A_1 - A$ dicesi *spostamento* di A; e se tutti i punti di S subiscono spostamenti equipollenti, si dice che la posizione S_1 è ottenuta da S con una *traslazione semplice* $A A_1$.

Immaginiamo ora la serie delle posizioni intermedie del sistema tra S ed S_1 e per due posizioni successive, anche vicinissime, abbia luogo la stessa proprietà. I varî punti di S descriveranno curve eguali e parallele ed il passaggio da S in S_1 si dice effettuato con un *moto continuo di traslazione*. Gli archi descritti da due punti qualunque di S, contati a partire dalle loro posizioni iniziali, sono eguali; le tangenti negli estremi sono parallele e però *in un moto continuo di traslazione le velocità dei varî punti del sistema sono, in ogni istante, eguali; e reciprocamente.*

Se poi in un sistema in moto avverrà che all'istante t, le velocità dei varî suoi punti sono rappresentate da vettori eguali, mentre in generale non lo sono in ogni altro istante diverso, allora *per rispetto alle velocità e all'istante t* il moto del sistema coincide con quello di un sistema identico dotato di un moto continuo di traslazione e la cui velocità è la stessa del sistema primitivo all'istante t. In tal caso dicesi che, in quell'istante il sistema è dotato di un *moto di traslazione istantanea.*

§ 2. **Moto di rotazione.** — Il sistema S abbia due punti fissi, e quindi fissa la loro congiungente. Due diverse posizioni S ed S_1 verranno a coincidere quando un punto P della prima verrà a coincidere col corrispondente P_1 della seconda: ossia quando il piano meridiano σ (cioè passante per

l'asse) contenente P, verrà a coincidere col corrispondente σ_1. Si dice che il sistema ha eseguita *una rotazione semplice* intorno l'asse. All'asse attribuiremo un senso tale che un osservatore, situato su questo al modo solito, veda compiersi le rotazioni positive nel senso del movimento delle lancette di un orologio.

Il più piccolo angolo θ di cui occorre far ruotare, nel verso positivo, σ per portarlo a coincidere con σ_1 dicesi *ampiezza* della rotazione. Lo stesso effetto si raggiunge colla rotazione $\theta + 2k\pi$ (k intero positivo); quindi *l'ampiezza della rotazione è determinata a meno di multipli di* 2π.

Immaginando segato S con un piano normale all'asse in O, si dice pure che il sistema piano ha effettuato una rotazione semplice intorno ad O.

Quando si ha particolare riguardo al moto continuo con cui da S passiamo ad S_1, si dice che il moto è di *rotazione continua*.

I punti di S descrivono archi di cerchio normali ai piani meridiani e coi centri sull'asse; quindi *le velocità sono normali all'asse ed hanno senso concorde.*

Punti che stanno alla stessa distanza dall'asse percorrono, in tempi eguali, archi eguali; e se stanno a distanze diverse percorrono archi proporzionali alle distanze stesse; dunque:

Le velocità, in uno stesso istante, stanno come le distanze dei punti dall'asse.

Sia ω, all'istante t, la grandezza della velocità dei punti che distano di *uno* dall'asse; quella dei punti alla distanza r è ωr.

Seghiamo, come s'è detto prima, il sistema S con un piano normale all'asse; su questo piano siano P e P_1 due punti alla distanza 1 da O; φ e φ_1 gli angoli che i piani meridiani σ e σ_1 formano con un piano fisso. Per la rigidità del sistema non varia, col tempo, l'angolo tra σ e σ_1, cioè

$$\varphi - \varphi_1 = \text{cost.}$$

L'arco percorso da P è φ e quello di P_1 è φ_1; quindi la loro velocità, cioè ω, è espressa da

$$\omega = \dot{\varphi} = \dot{\varphi}_1 ;$$

però ω dicesi *velocità angolare*. Se ω è costante il moto di rotazione è uniforme; allora, scegliendo convenientemente il piano fisso,

$$\varphi = \omega t;$$

ω è l'angolo descritto da un qualunque piano meridiano in un secondo.

Le dimensioni di ω sono

$$[t^{-1}].$$

Sia ora P (Fig. 2) un punto qualunque del piano, distante di r da O, e $\dot{P}$ la sua velocità. In un punto qualunque dell'asse, p. es. O, riporto sull'asse un vettore Ω il cui modulo sia ω, in modo che la terna $P - O$, $\dot{P}$, Ω sia destrogira; per quello che si è osservato, il senso di Ω sull'asse sarà sempre lo stesso qualunque sia il punto P. Il vettore Ω di-

cesi *vettore della velocità angolare*. Si deduce

$$(1) \qquad \dot{P} = |\Omega(P - O)$$

qualunque sia O; dunque (Cap. 1°, § 7) *nel moto continuo di rotazione intorno ad un asse, la velocità di un punto del sistema è il momento del vettore velocità angolare rispetto al punto.*

Ω O P Ṗ

Fig. 2.

Se infine il moto di un sistema all'istante t è tale che le velocità dei varî suoi punti sono i momenti, rispetto ai punti, di un vettore Ω, il moto del sistema, per ciò che riguarda le velocità, coinciderà all'istante t col moto continuo di rotazione di un sistema identico intorno ad Ω e la cui velocità angolare, in quell'istante, è eguale al mod Ω. Però si dice che il moto del sistema all'istante t è una *rotazione istantanea* intorno ad Ω.

§ 3. **Moto elicoidale.**—Un sistema subisca una traslazione τ lungo un asse e poi una rotazione θ intorno allo stesso.

La posizione finale A_1 assunta da un punto A non varia invertendo i due movimenti; cioè effettuando prima la rotazione e poi la traslazione. Si dice che questi due moti sono *invertibili*.

Immaginiamo quindi decomposta traslazione e rotazione in altre m da effettuare alternatamente; supposto poi m infinitamente grande veniamo a

far muovere ciascun punto A di moto uniforme su di un cerchio, mentre il cerchio si sposta pure uniformemente e normalmente all'asse. Quindi A descrive un'elica cilindrica il cui asse è τ e si viene a riprodurre il moto della vite nella madrevite. Le eliche descritte dai varî punti hanno lo stesso passo.

Tale moto dicesi *elicoidale continuo* e risulta composto di una rotazione e traslazione lungo lo stesso asse.

Se questi due movimenti sono istantanei il moto elicoidale dicesi pure *istantaneo.*

Se τ ed ω sono, all'istante t, la velocità nel moto istantaneo di traslazione (lungo l'asse) e la velocità angolare nel moto di rotazione, quella di A nel moto elicoidale risultante, è la risultante di τ, secondo l'asse, ed $r\omega$ normale al piano meridiano; detto quindi α l'angolo che la tangente all'elica in A forma coll'asse, e che, come sappiamo, non varia col variare di A sull'elica, si ha

$$\tau = r\omega \operatorname{cotg}\alpha.$$

Ma $2\pi r \operatorname{cotg}\alpha$ è il passo costante di tutte le eliche; se quindi lo rappresentiamo con $2\pi h$, avremo

$$\tau = h\omega$$

ed h dicesi *parametro* del moto elicoidale. La traslazione e la rotazione corrispondono ai valori ∞ e 0 del parametro.

§ 4. **Analisi del moto finito di un sistema rigido.** — L'importanza dei movimenti fondamentali precedentemente considerati apparirà subito dal seguente teorema:

Il trasporto di un sistema rigido da una ad un'altra posizione dello spazio può ottenersi con un moto elicoidale.

Cominciamo a considerare un caso particolare. Un piano del sistema S resti sovrapposto a sè stesso (e quindi ogni piano parallelo); considerando le sezioni s ed s_1 di tal piano con S ed S_1, quando avremo fatto coincidere s con s_1 avremo pur ottenuta la coincidenza di S e S_1. Questo caso è, a sua volta, un caso particolare di quello in cui un punto O di S coincide col proprio corrispondente in S_1 (punto unito). La figura s che si ottiene segando S con una sfera arbitraria di centro O, ha per corrispondente la figura s_1 sezione della stessa sfera con S_1; e se porteremo a coincidere s con s_1 otterremo pure la coincidenza di S e S_1. In questi due casi particolari adunque noi ci dobbiamo limitare al *trasporto di una figura piana (sferica) da una ad un'altra posizione sul proprio piano (sfera).*

La coincidenza si otterrà quando due punti della prima vengono a coincidere con i corrispondenti nella seconda.

Sia A (Fig. 3) un punto qualunque che po-

tremo sempre supporre appartenente alla posizione s; A_1 il suo corrispondente in s_1.

Se A coincide con A_1, assumiamo un'altra coppia B, B_1 di punti corrispondenti, certamente distinti, perchè altrimenti s coinciderebbe con s_1. Porteremo B a coincidere con B_1 con una rotazione semplice intorno ad A, cioè intorno ad un asse normale al piano o intorno alla AO secondo si tratta di una figura piana o sferica. Non coincida A con A_1; immaginiamo A_1 appartenente ad s e sia A'_1 il suo corrispondente in s_1; poichè $AA_1 = A_1 A'_1$, A'_1 non coinciderà con A_1. Per questi tre punti, non supposti in linea retta o sopra un cerchio massimo, facciamo passare un cerchio di centro (*polo*) C. Con una rotazione semplice intorno C (oppure intorno CO) porteremo A su A_1, A_1 su A'_1 e quindi s su s_1. Se A'_1 coincide con A, il punto C cade nel punto medio di AA_1 e la rotazione è di 180°. Se i tre punti sono in linea retta, la sovrapposizione si fa con una traslazione AA_1; e se sono su di un cerchio massimo, C è il polo di questo. Concludiamo dunque: *una figura piana o sferica può essere trasportata da una posizione ad un'altra del proprio piano o sfera*

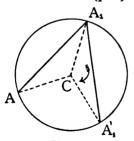



Fig. 3.

con una traslazione o con una rotazione semplice intorno ad un punto del piano o della sfera.

Questo punto (centro di rotazione) essendo un punto unito di s e di s_1 è unico. Possiamo anche dire: *se due diverse posizioni di un sistema rigido hanno un punto unito, il trasporto dall'una all'altra si può ottenere con una rotazione intorno ad un asse passante pel punto unito.*

Date due coppie di punti corrispondenti A, B ed A_1, B_1, la determinazione del punto C si fa agevolmente congiungendo A con A_1 e B con B_1 e nei punti di mezzo di queste elevando le normali, che debbono incontrarsi in C.

Passiamo ora al caso generale. Nella posizione S_1 scegliamo un punto ad arbitrio A_1; sia A il suo corrispondente in S; se A coincide con A_1 ricadiamo nel caso precedente. Siano adunque diversi, ed imprimiamo al sistema S la traslazione $A A_1$; da S passeremo alla S' che potrà considerarsi come una diversa posizione di S_1. Se S' coincide con S_1, il trasporto si è ottenuto con una sola traslazione; se ciò non è, A_1 essendo un punto unito per S' ed S_1, potremo ottenere la loro sovrapposizione con una rotazione intorno ad un asse uscente da A_1; e poichè A_1 è arbitrario, così: *il trasporto di un sistema rigido da una posizione ad un'altra dello spazio si può ottenere, ed in infiniti modi, con una traslazione ed una rotazione semplice.*

Sia σ un piano normale all'asse di rotazione relativo ad A_1, ed appartenga alla posizione S. Durante la traslazione σ non muta di orientazione, come pure per la rotazione; quindi il corrispondente σ_1 è parallelo a σ. Qualunque altro movimento capace di far coincidere S con S_1, porterà σ su σ_1; e ciò non potrebbe accadere se un altro asse di rotazione (p. es. quello passante per B_1) non fosse normale a σ e quindi parallelo al primo asse. Dunque: *tutti gli assi di rotazione sono paralleli tra loro.*

Siano α e β due piani di S tra loro paralleli passanti per A e per B e rispettivamente paralleli agli assi di rotazione relativi ad A_1 e B_1; i loro corrispondenti α_1, β_1 saranno pure tra loro paralleli e passeranno per gli assi relativi ad A_1 e B_1. L'ampiezza della prima rotazione, per cui da S si passa ad S_1, è misurata dall'angolo diedro $\alpha\alpha_1$; quella della seconda dall'angolo diedro $\beta\beta_1$; dunque, a meno di multipli di 2π, *le ampiezze delle varie rotazioni sono eguali.*

Torniamo ora alla considerazione del piano σ normale alla direzione comune degli assi di rotazione, ed al suo corrispondente parallelo σ_1. Con una traslazione normale al piano σ, portiamo a coincidere σ con σ_1; non coincideranno con ciò, in generale, le figure s ed s_1 sezioni di S ed S_1 con σ e σ_1; ma esse si potranno far coincidere

con una rotazione intorno ad un asse normale al piano. Quindi S ed S_1 verranno a coincidere col duplice moto di traslazione e rotazione intorno allo stesso asse, cioè con un moto elicoidale. Resta dunque provato il teorema enunciato *.

L'asse di moto elicoidale dicesi pure di *rotazione e scorrimento*; esso è unico; se ne esistesse infatti un altro, dovrebbe essergli parallelo e però mentre nella traslazione resterebbe sovrapposto a sè stesso, non lo sarebbe più nella rotazione intorno al primo.

Notiamo ancora che la *traslazione relativa al moto elicoidale è la minima*; e che *le ampiezze delle varie traslazioni hanno stessa proiezione sull'asse di rotazione.*

---

* Il teorema è stato dato da CHASLES [*Note sur les propriètès gènèrales de deux corps*, etc., Bull. de Férussac., **14** (1830)], che ha anche considerato il caso particolare del piano (sfera) in una memoria del 1829 presentata alla Soc. philom. e pubblicata nel Bull. de la Soc. mathém. de France, **6** (1877-78), pp. 208-250: *Mém. de géomètrie sur la construction des normales à plusieurs courbes mécaniques.* Il caso del sistema con un punto fisso era stato trattato da EULER [*Formules generales pro translatione,* etc. Novi Comm. Acad. Petrop., **20** (1775), p. 202]. I teoremi di CHASLES furono, poco dopo, ritrovati da GIORGINI nel 1832 [Mem. della Soc. italiana delle Scienze, **21** (1834)]. Per molti risultati di questo § vedi pure: RODRIGUES: *Des lois géométriques qui régissent les déplacements,* etc. [Journal de Mathém., **5** (1840), p. 380].

Si può assegnare una costruzione semplice di un tale asse quando si conoscono tre coppie di punti corrispondenti A, A_1; B, B_1; C, C_1.

Infatti si può determinare la direzione di una retta tale che le proiezioni di AA_1, BB_1, CC_1 siano le stesse.

Basta da un punto arbitrario O condurre i segmenti OA_2, OB_2, OC_2 equipollenti ad AA_1, ecc. e da O la normale OP al piano $A_2 B_2 C_2$; la quale ci dà la direzione e la grandezza della traslazione minima. Considerando poscia un piano σ normale ad OP e le proiezioni ortogonali A', A'_1, B', B'_1 dei corrispondenti punti A, A_1, B, B_1, il punto C di σ, che è centro della rotazione colla quale A' e B' coincidono con A'_1 e B'_1, dà il punto per cui passa l'asse di moto elicoidale. Tale costruzione è dovuta pure a CHASLES.

Consideriamo le posizioni successive S, S_1, S_2, ... di uno stesso sistema rigido e siano r_1, r_2, ... gli assi di moto elicoidale; di guisa che con un moto elicoidale intorno r_1 si passa da S ad S_1; ecc.

Siano poi r'_1, r'_2, ... quelle rette, rigidamente connesse con S, e che vengono successivamente a coincidere con r_1, r_2, ... Facendo quindi coincidere questa serie rigata colla r_1, r_2, ... supposta fissa nello spazio, si viene a riprodurre, con una immagine chiara e netta, il passaggio di S per le posizioni S_1, S_2, ...

Nei due casi particolari considerati in principio del §, il risultato precedente acquista una forma anche più intuitiva.

Infatti consideriamo sul piano (sfera) della figura i successivi centri di rotazione C_1, C_2, ... e poi i punti C'_1, C'_2, ... rigidamente connessi colla figura e tali che C'_2 venga a coincidere con C_2 quando s ruota intorno a C_1, ecc. Verremo a costruire due spezzate poligonali (rettilinee o sferiche) a lati rispettivamente eguali; e portando a coincidere successivamente i lati della prima, cui è connessa rigidamente s, con quelli della seconda, supposta fissa, trasporteremo la s in s_1, s_2, ...

§ 5. **Composizione dei moti finiti.** — Mediante un certo numero di movimenti elicoidali intorno r_1, r_2, ... un sistema S passi successivamente nelle posizioni S_1, S_2, ... S_n. Ma possiamo passare direttamente da S in S_n con un unico moto elicoidale che, in questo senso, ha lo stesso effetto dei precedenti. Questi si dicono *componenti* e quello *moto elicoidale risultante*; quindi *più moti elicoidali si compongono in un moto elicoidale.*

Il moto risultante dipende non solo dai moti componenti, ma ancora dal loro ordine di successione.

Il problema generale che dovrebbe risolversi è il seguente: *assegnare (geometricamente ed analiticamente) la posizione dell'asse (o le sue coordinate),*

la traslazione e la rotazione del moto risultante, cogniti gli elementi analoghi dei moti componenti.

Noi ci limiteremo a considerare solamente alcuni casi particolari.

Anzitutto è facile verificare che: *più traslazioni si compongono in una traslazione rappresentata da un vettore somma dei vettori delle traslazioni componenti.*

In questo caso i movimenti sono invertibili; come sono pure invertibili più rotazioni, o una rotazione e traslazione, lungo lo stesso asse.

La considerazione poi delle varie posizioni di una figura piana (sferica) sul proprio piano (sfera) conduce al seguente caso particolare del precedente teorema generale: cioè *a più rotazioni intorno ad assi concorrenti (a distanza finita o infinita) si può sostituire una rotazione intorno ad un asse concorrente coi primi, o una traslazione.*

Si può assegnare la posizione di questo asse e l'ampiezza della rotazione risultante con una semplice costruzione geometrica. Si tratti anzitutto di due rotazioni intorno a due assi concorrenti in O, s_1 ed s_2, e di ampiezze $2\omega_1$ e $2\omega_2$. Considereremo per O due semirette, lungo gli assi, tali che un osservatore collocato su queste, al modo solito, veda avvenire le rotazioni nel senso positivo. Si traccino per s_1 due semipiani α ed α' che formino colla faccia $s_1 s_2$ due angoli eguali ad ω_1 e per s_2

altri due semipiani β, β' che formino colla stessa faccia due angoli eguali ad ω_2.

La semiretta $s \equiv \alpha\beta$ si porterà sulla $s' \equiv \alpha'\beta'$ per effetto della prima rotazione, e tornerà in s per effetto della seconda; dunque *s è l'asse della rotazione risultante.* Invertendo l'ordine delle due rotazioni l'asse della rotazione risultante diventa s'.

Diciamo poi s'_1 la simmetrica di s_1 rispetto al piano $\beta \equiv s s_2$; per effetto della prima rotazione, s_1 non si sposta; per la seconda rotazione si porta su s'_1 e poichè la sovrapposizione di s_1 con s'_1 si può ottenere con una rotazione intorno s dell'angolo diedro $s_1 s s'_1$, così questa è la rotazione risultante, dello stesso senso delle due prime. Diciamola 2ω; cioè

$$s_1 s s_2 = \pi - \omega;$$

dunque s_1, s, s_2 formano un triedro i cui angoli diedri interni sono:

$$\omega_1, \quad \pi - \omega, \quad \omega_2.$$

Di qui si deduce

$$\omega_1 + \pi - \omega + \omega_2 > \pi,$$

cioè

$$\omega_1 + \omega_2 > \omega.$$

Inoltre:

$$\cos(\pi - \omega) = -\cos\omega_1 \cos\omega_2 + \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 \cos(s_1, s_2),$$

$$\cos\omega = \cos\omega_1 \cos\omega_2 - \operatorname{sen}\omega_1 \operatorname{sen}\omega_2 \cos(s_1, s_2),$$

la quale determina $\cos\omega$ in funzione delle rotazioni componenti e dell'angolo dei due assi; tale valore non dipende dall'ordine di successione delle

rotazioni. Si deduce pure che data la rotazione risultante e le direzioni di s_1 e s_2, restano determinate le rotazioni componenti.

Il precedente risultato si può anche enunciare così:

Le rotazioni che si effettuano intorno a tre assi concorrenti e le cui ampiezze sono i doppi degli angoli diedri del triedro da essi formato, hanno per prodotto l'unità, cioè riconducono il corpo alla posizione primitiva *.

L'applicazione successiva della regola precedente condurrà a determinare l'asse e l'ampiezza della rotazione risultante di più altre intorno ad assi concorrenti; posizione dell'asse ed ampiezza della rotazione risultante dipendono dall'ordine delle componenti.

Nel caso delle rotazioni intorno ad assi paralleli conviene considerare le rotazioni dello stesso senso o di senso contrario. Nel primo caso si applica la costruzione precedente sostituendo al triedro

---

* Il teorema sulla composizione di due rotazioni trovasi nella memoria di RODRIGUES. L'enunciato precedente è dovuto ad HAMILTON, *Lectures on Quaternions* (Dublin 1853), § 217 e 344.

Vedi, negli esercizii in fine del Cap., eser. 7, il teorema più generale di HALPHEN. Tutta la teoria della composizione dei moti finiti è sviluppata da RODRIGUES (mem. cit. a pagina 63).

un prisma; *l'ampiezza della rotazione risultante è la somma delle due componenti.*

Nel secondo caso converrà considerare l'intersezione s dei due semipiani $\alpha\beta'$ e quella $s' \equiv \alpha'\beta$. Ragionando al modo solito risulta che s (oppure s') è l'asse della rotazione risultante, la cui ampiezza è la differenza delle ampiezze delle componenti e che ha lo stesso senso della maggiore. Attribuendo quindi un segno alle rotazioni si può dire che:

L'ampiezza della rotazione risultante di due altre i cui assi sono paralleli è la somma algebrica delle rotazioni componenti.

L'ultima costruzione cade in difetto se le due rotazioni sono eguali e di senso contrario, cioè quando costituiscono una *coppia di due rotazioni.* In tale ipotesi, per maggior chiarezza, seghiamo i due assi con un piano normale in O_1 e O_2. Per effetto delle due rotazioni (di ampiezza ω) O_1 si porti in A; $O_1 A$ è lo spostamento di O_1; completiamo quindi il trapezio isoscele $O_1 O_2 B A$ ed il parallelogrammo $A O_1 O_2 C$. Poichè $O_2 B = O_2 C$ e $B O_2 C = \omega$ si deduce che O_2 per effetto della rotazione intorno ad O_1 si porta in B, e questo per la rotazione intorno O_2 va in C; sicchè lo spostamento di O_2, cioè $O_2 C$, è equipollente a quello di O_1;

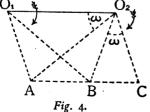



Fig. 4.

dunque: *una coppia di due rotazioni equivale ad una traslazione;* il cui senso ed ampiezza è dato da $O_1 A$ oppure da $O_2 B$ secondo l'ordine delle due rotazioni componenti.

Reciprocamente: *una traslazione si può in infiniti modi riguardare come la risultante di una coppia di due rotazioni.*

Deduciamo ancora che *una traslazione, composta con una rotazione intorno un asse normale, ha per effetto di spostare l'asse parallelamente a sè stesso senza far variare il senso e l'ampiezza della rotazione.* Il piano parallelo alla traslazione e normale all'asse di rotazione, seghi questo in O; conduciamo due rette inclinate di ω sulla normale a τ e tra queste poniamo un segmento equipollente a τ. Per effetto della traslazione O_1 si porta in O_2 e questo per effetto della rotazione torna in O_1, che è quindi la traccia dell'asse della rotazione risultante. Se precede la rotazione, tale traccia è O_2. Di più O per effetto della rotazione e traslazione si porta in O' e siccome da O si va in O' con una rotazione intorno O_2 di un angolo $O O_2 O' = 2\omega$, così è vero il teorema.

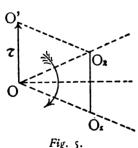



Fig. 5.

Dopo ciò siamo al caso di comporre un nu-

mero qualunque di rotazioni intorno ad assi paralleli e di senso qualunque; il moto risultante è una rotazione intorno ad un asse parallelo ai primi e la cui ampiezza è eguale alla somma algebrica delle ampiezze delle rotazioni componenti; oppure una traslazione normale alla direzione comune degli assi.

§ 6. **Formule per la composizione dei moti finiti.** — Alcuni dei risultati precedenti si possono dimostrare in un modo che condurrà a stabilire le formule per la composizione dei moti finiti.

Una figura piana s sia riferita ad un punto O e ad un vettore I del piano stesso; in un'altra posizione siano O_1 ed I_1 i corrispondenti di O ed I; P e P_1 altri due punti qualunque corrispondenti. Poichè

$$P - O = r e^{i\theta} I, \quad P_1 - O_1 = r e^{i\theta} I_1, \quad I_1 = e^{i\varphi} I,$$

risulta

$$(2) \qquad P_1 - O_1 = (P - O) e^{i\varphi}.$$

Cerchiamo quell'unico punto C che coincide col proprio corrispondente; dovrà essere

$$(3) \qquad C - O_1 = (C - O) e^{i\varphi},$$

la quale determina C, purchè $e^{i\varphi} \neq 1$. Se $e^{i\varphi} = 1$, è

$$P_1 - O_1 = P - O;$$

al qual caso corrisponde una traslazione. Sottraendo (3) da (2) si ottiene

$$(4) \qquad P_1 - C = (P - C) e^{i\varphi};$$

dunque ruotando $P - C$ intorno a C di un an-

golo φ si otterrà $P_1 - C$, cioè P verrà a coincidere con P_1; riotteniamo uno dei risultati del § 4. E così potrebbero dedursi i teoremi sulla composizione delle rotazioni intorno ad assi paralleli, ecc.

Così, ad esempio, nel caso di due rotazioni $2\omega_1$, $2\omega_2$ intorno ad O_1 e O_2, se diciamo P_1 e P_2 le successive posizioni di un punto P, abbiamo

$$P_1 = O_1 + (P - O_1)e^{2i\omega_1}, \quad P_2 = O_2 + (P_1 - O_2)e^{2i\omega_2};$$

quindi

$$P_2 = O_2 + (O_1 - O_2)e^{2i\omega_1} + (P - O_1)e^{2i(\omega_1+\omega_2)}.$$

Si determini poscia un punto O tale che

$$(5) \quad O = O_2 + (O_1 - O_2)e^{2i\omega_1} + (O - O_1)e^{2i(\omega_1+\omega_2)},$$

il quale risulta individuato purchè

$$\omega_1 + \omega_2 \neq 0;$$

allora, per sottrazione, avremo

$$P_2 - O = (P - O)e^{2i(\omega_1+\omega_2)},$$

cioè otterremo P_2 da P con una rotazione $\omega_1 + \omega_2$ intorno ad O. E se $\omega_1 + \omega_2 = 0$, avremo una traslazione.

Il procedimento è generale; riferendoci poi ad un sistema di coordinate cartesiane, cognite le coordinate di O_1, O_2, ... si possono agevolmente dedurre quelle di O; posto infatti

$$O_1 - C = Ix_1 + Jy_1; \quad O_2 - C = Ix_2 + Jy_2;$$
$$O - C = Ix + Jy$$

sostituendo in (5) ed eguagliando i coefficienti di I ed J si trova x ed y.

La (4) può porsi sotto un'altra notevole forma. Pongasi, riferendoci all'origine,

$$z = r e^{i\theta};$$

z, com'è noto, rappresenta la variabile complessa $x + iy$ del punto P del piano. Se diciamo z_1 e ζ la stessa quantità ma relativa ai punti P_1 e C, la (4) si trasforma nella

$$z_1 - \zeta = (z - \zeta) e^{i\varphi}.$$

Posto quindi

$$\alpha = e^{-i\varphi}, \quad \beta = \zeta(1 - e^{-i\varphi}),$$

risulta

$$(6) \qquad z = \alpha z_1 + \beta;$$

cioè: *in una rotazione del piano intorno ad un suo punto la variabile complessa z subisce una trasformazione lineare.*

Passiamo ora alla considerazione di una figura sferica s sulla propria sfera, di cui supporremo eguale ad uno il raggio; e riferiamola ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali x, y, z coll'origine nel centro. La terna x, y, z, nel passaggio di s in s_1, assuma la posizione x_1, y_1, z_1, fissata, rispetto alla prima, dai coseni direttori dei nuovi assi; e precisamente siano: a_1, b_1, c_1 quelli dell'asse x_1; a_2, b_2, c_2 quelli dell'asse y_1 e finalmente a_3, b_3, c_3 quelli dell'asse z_1. Dalla geometria analitica si sa che il determinante formato coi nove coseni è ortogonale, cioè il quadrato di una linea (colonna) è eguale ad uno; il prodotto di due

linee (colonne) è zero. Di più le due terne essendo congruenti il valore del determinante è $+1$ ed ogni elemento è eguale al suo minore complementare.

I nove coseni soddisfacendo a sei relazioni (tra le linee o colonne) possono esprimersi in funzione di tre di essi o, in generale, di tre altre quantità. Tra le varie rappresentazioni la seguente è assai importante.

Poichè $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1,$

possiamo porre:

$$(7) \quad c_1 = \operatorname{sen} \varphi \operatorname{sen} \vartheta, \quad c_2 = \cos \varphi \operatorname{sen} \vartheta, \quad c_3 = \cos \vartheta;$$

ϑ è l'angolo tra i due assi z e z_1.

Essendo ancora

$$a_3^2 + b_3^2 + c_3^2 = 1,$$

possiamo porre

$$(8) \quad a_3 = \operatorname{sen} \psi \operatorname{sen} \vartheta, \quad b_3 = -\cos \psi \operatorname{sen} \vartheta.$$

I tre angoli φ, ψ, ϑ così definiti coincidono con i cosidetti *angoli euleriani*.

Sarebbe semplice dedurre, da (7) e (8), i valori degli altri coseni espressi per φ, ψ, ϑ; ma non avremo bisogno di queste espressioni, poco simmetriche. Introduciamo invece altri quattro parametri definiti da:

$$(9) \quad \begin{cases} \alpha = \cos \dfrac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}, & \beta = i \operatorname{sen} \dfrac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}(\psi-\varphi)}, \\[2ex] \gamma = i \operatorname{sen} \dfrac{\vartheta}{2} e^{\frac{i}{2}(-\psi+\varphi)}, & \delta = \cos \dfrac{\vartheta}{2} e^{-\frac{i}{2}(\psi+\varphi)}. \end{cases}$$

Eliminando φ, ψ, ϑ, troviamo che tra questi ha luogo la

$$(9') \qquad \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Dalla definizione stessa risulta che α e δ sono immaginarii coniugati, come pure β e $-\gamma$. Colle (9) si ottengono le

$$(10) \begin{cases} c_1 = -\alpha\gamma + \beta\delta, \quad c_2 = -i\alpha\gamma - i\beta\delta, \quad c_3 = \alpha\delta + \beta\gamma \\ a_3 + i b_3 = -2\alpha\beta. \end{cases}$$

Inoltre si ha:

$$(a_1 + i b_1) c_1 + (a_2 + i b_2) c_2 = -(a_3 + i b_3) c_3$$
$$(a_1 + i b_1) c_2 - (a_2 + i b_2) c_1 = i (a_3 + i b_3),$$

oppure

$$(a_1 + i b_1) c_1 + (a_2 + i b_2) c_2 = 2\alpha\beta(\alpha\delta + \beta\gamma)$$
$$(a_1 + i b_1) c_2 - (a_2 + i b_2) c_1 = -2i\alpha\beta(\alpha\delta - \beta\gamma);$$

da queste possiamo ricavare $a_1 + i b_1$ ed $a_2 + i b_2$; osservando che

$$c_1^2 + c_2^2 = -4\alpha\beta\gamma\delta,$$

si trova

$$(11) \quad a_1 + i b_1 = \alpha^2 - \beta^2, \quad a_2 + i b_2 = i\alpha^2 + i\beta^2.$$

Le (10) e le (11) sono le formule che strettamente ci occorrono; tuttavia è ben notare subito una conseguenza notevolissima.

Separiamo nelle α, β, γ, δ la parte reale dalla immaginaria, ponendo

$$(12) \begin{cases} \alpha = \rho(1 + i\nu), & \delta = \rho(1 - i\nu) \\ \beta = \rho(-\mu + i\lambda), & \gamma = \rho(\mu + i\lambda), \end{cases}$$

ρ, λ, μ, ν essendo quattro grandezze reali, tra le quali, per la (9'), sussiste la

$$\rho^2(1+\lambda^2+\mu^2+\nu^2)=1. \tag{13}$$

Sostituendo le (12) nelle (10) ed (11) deduciamo le seguenti espressioni *razionali* dei nove coseni in funzione di tre indeterminate λ, μ, ν:

$$\left\{\begin{array}{l} a_1=\rho^2(1+\lambda^2-\mu^2-\nu^2),\ b_1=2\rho^2(\lambda\mu+\nu), \\ \qquad c_1=2\rho^2(\lambda\nu-\mu) \\ a_2=2\rho^2(\lambda\mu-\nu),\ b_2=\rho^2(1-\lambda^2+\mu^2-\nu^2), \\ \qquad c_2=2\rho^2(\mu\nu+\lambda) \\ a_3=2\rho^2(\lambda\nu+\mu),\ b_3=2\rho^2(\mu\nu-\lambda), \\ \qquad c_3=\rho^2(1-\lambda^2-\mu^2+\nu^2). \end{array}\right. \tag{14}$$

I tre parametri λ, μ, ν diconsi *parametri razionali* *.

Torniamo ora alla figura sferica s e sia $P(x, y, z)$ un suo punto, Q la sua proiezione

---

* Le (14) sono un caso particolare delle formule di CAYLEY che esprimono gli n^2 coefficienti di una sostituzione ortogonale in funzione di $\frac{1}{2}n(n-1)$ parametri. [Crelle's Journal, **32**; (1846)]. Esse sono state date, sotto forma omogenea, da EULER: *Problema algebraicum ob affectiones prorsus singulares memorabile.* [Novi Comm. Acad. Scient. Imper. Petropolitanæ, **15** (anno 1770), pag. 75 e pag. 101]. EULER ha anche trattato, quasi divinando, il caso di $n=4$. Le stesse formule furono ritrovate da RODRIGUES nella memoria già citata. Sono state dedotte con metodi svariati.

Cfr. specialmente una Nota di F. CASPARY [Bull. des Scien. mathém. et astron. (2) **13** (1889)]: un'altra di DARBOUX nella 4ª parte della *Théorie générale des surfaces;* ed infine una mia Nota nel J. de Sciencias Mathem. e Astron., **14** (1901).

stereografica dal polo N sul piano equatoriale xy. Le coordinate di Q si deducono da quelle x, y di P, riducendole nel rapporto di 1 ad $1-z$. Quindi considerando la variabile complessa ζ relativa al punto Q, abbiamo:

$$(15) \qquad \zeta = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{1+z}{x-iy},$$

poichè si ha

$$(x+iy)(x-iy) = (1+z)(1-z).$$

Dato Q, oppure ζ, resta univocamente determinato P.

Due punti diametralmente opposti P e P' della sfera hanno per corrispondenti, sul piano equatoriale, due punti allineati con O e situati da parti opposte; essi hanno dunque argomenti che differiscono di π; ed essendo retto il triangolo QNQ', il prodotto dei loro moduli è eguale ad 1; e reciprocamente.

Sia P_1 il corrispondente di P in s_1; x_1, y_1, z_1 siano le sue coordinate: abbiamo

$$x = a_1 x_1 + a_2 y_1 + a_3 z_1, \text{ ecc.}$$

Poniamo

$$\zeta_1 = \frac{x_1 + iy_1}{1 - z_1};$$

ed osserviamo che

$$\zeta = \frac{x+iy}{1-z} = \frac{(a_1+ib_1)x_1+(a_2+ib_2)y_1+(a_3+ib_3)z_1}{1-(c_1x_1+c_2y_1+c_3z_1)},$$

cioè sostituendo i valori (10) ed (11)

$$\zeta = \frac{\alpha^2(x_1 + iy_1) - \beta^2(x_1 - iy_1) - 2\alpha\beta z_1}{\alpha\gamma(x_1 + iy_1) - \beta\delta(x_1 - iy_1) + \alpha\delta(1 - z_1) - \beta\gamma(1 + z_1)}.$$

Moltiplicando numeratore e denominatore per $x_1 + iy_1$, possiamo trasformare la eguaglianza precedente nella

$$\zeta = \frac{[\alpha(x_1 + iy_1) + \beta(1 - z_1)][\alpha(x_1 + iy_1) - \beta(1 + z_1)]}{[\gamma(x_1 + iy_1) + \delta(1 - z_1)][\alpha(x_1 + iy_1) - \beta(1 + z_1)]},$$

cioè infine:

$$(16) \qquad \zeta = \frac{\alpha\zeta_1 + \beta}{\gamma\zeta_1 + \delta};$$

la variabile complessa ζ, *per ogni rotazione della sfera su sè stessa, subisce una trasformazione lineare fratta della forma* (16) *.

Cerchiamo un punto che coincida col proprio corrispondente; pel quale quindi $\zeta = \zeta_1$; la (16) ci dà

$$\gamma\zeta^2 + (\delta - \alpha)\zeta - \beta = 0,$$

cui corrispondono due radici ζ e ζ' tali che

$$|\zeta\zeta'| = |-\beta| : |\gamma| = 1;$$

inoltre il rapporto $\zeta : \zeta'$ è reale e negativo; infatti, posto

$$\alpha - \delta = im, \quad 4\beta\gamma = -n^2$$

(m ed n reali), risulta

---

* Queste formule sono di HELMHOLTZ [*Optique physiologique,* traduz. francese (Paris, 1867), pag. 658; e edizione tedesca (Leipzig, 1867), pag. 513] nel §: « Stereographische Projection der Drehungen ». Sono state poi ritrovate da CAYLEY [Mathem. Ann., **15** (1879), pag. 238].

$$\zeta : \zeta' = (m + \sqrt{m^2 + n^2}) : (m - \sqrt{m^2 + n^2}).$$

A questi due valori corrispondono dunque due punti diametralmente opposti della sfera; ed il trasporto di s in s_1 si può fare con una rotazione intorno all'asse che li contiene.

Tale asse forma cogli assi x, y, z gli stessi angoli che con x_1, y_1, z_1; diciamo a, b, c i coseni direttori di questo asse con una o con l'altra terna. Detta 2ω la rotazione e considerando il triedro che ha per spigoli l'asse e x ed x_1, avremo

$$a_1 = a^2 + (1 - a^2) \cos 2\omega$$

e così

$$b_2 = b^2 + (1 - b^2) \cos 2\omega$$

$$c_3 = c^2 + (1 - c^2) \cos 2\omega.$$

Sommando e riducendo si trova

$$(17) \qquad 4 \cos^2 \omega = 1 + a_1 + b_2 + c_3.$$

Notiamo poi ancora che, essendo

$$2 a^2 \operatorname{sen}^2 \omega = a_1 - \cos 2\omega,$$

si ha:

$$(18) \quad \begin{cases} 4 a^2 \operatorname{sen}^2 \omega = 1 + a_1 - b_2 - c_3 \\ 4 b^2 \operatorname{sen}^2 \omega = 1 - a_1 + b_2 - c_3 \\ 4 c^2 \operatorname{sen}^2 \omega = 1 - a_1 - b_2 + c_3. \end{cases}$$

Si ricava da queste l'interpretazione dei parametri λ, μ, ν. Infatti sostituendo nella (17) e (18) i valori (14), e tenendo presente la (13), si ottiene

$$\rho^2 = \cos^2 \omega, \quad \rho^2 \lambda^2 = a^2 \operatorname{sen}^2 \omega, \text{ ecc.}$$

cioè

$$(19) \quad \lambda = \pm a \operatorname{tang} \omega; \quad \mu = \pm b \operatorname{tang} \omega; \quad \nu = \pm c \operatorname{tang} \omega.$$

Per decidere del segno, conveniamo di riguar-

dare determinata una rotazione a meno di multipli di 4π e di assumere λ, μ, ν collo stesso segno di a, b, c. È poi indifferente eseguire la rotazione 2ω intorno ad (a, b, c) oppure la rotazione -2ω intorno a $(-a, -b, -c)$; cioè possiamo cambiare ω in $-\omega$, purchè al tempo stesso si cambino a, b, c in $-a$, $-b$, $-c$. Dunque i segni di $\cos\omega$, $a \operatorname{sen}\omega$, $b \operatorname{sen}\omega$, $c \operatorname{sen}\omega$, sono perfettamente determinati e basterà determinarli in un caso particolare. L'asse di rotazione sia la semiretta ON; quindi $a = b = 0$, $c = 1$. L'angolo tra z e z_1 è costantemente nullo e quello tra x ed x_1 è 2ω; ma rammentiamo che, in generale, ψ è l'angolo che l'intersezione dei due piani xy, x_1y_1 forma con x, e φ quello della stessa con x_1. Nel caso attuale tale intersezione è indeterminata, ma

$$\psi + \varphi = 2\omega;$$

quindi, per la prima delle (9),

$$\alpha = \cos\omega + i \operatorname{sen}\omega = \cos\omega(1 + i \operatorname{tang}\omega);$$

dunque per le (12) si vede che nelle (19) dovremo tenere il segno positivo. Ancora si ha

$$(20)\begin{cases} \alpha = \cos\omega + ic \operatorname{sen}\omega, & \delta = \cos\omega - ic \operatorname{sen}\omega, \\ \beta = \operatorname{sen}\omega(-b + ia), & \gamma = \operatorname{sen}\omega(b + ia); \end{cases}$$

donde

$$2\cos\omega = \alpha + \delta,$$

le quali dànno tutti gli elementi della rotazione della sfera in funzione di α, β, γ, δ, che perciò diconsi *parametri di rotazione*.

Possiamo dedurre ora le formule per la composizione delle rotazioni.

Siano $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \delta_1$; $\alpha_2, \beta_2, \ldots$ i parametri di due rotazioni intorno ad assi concorrenti; un punto P della sfera passi in P_1 e poi in P_2 e la ζ diventi ζ_1 e ζ_2; avremo

$$\zeta = \frac{\alpha_1 \zeta_1 + \beta_1}{\gamma_1 \zeta_1 + \delta_1}, \qquad \zeta_1 = \frac{\alpha_2 \zeta_2 + \beta_2}{\gamma_2 \zeta_2 + \delta_2};$$

quindi:

$$\zeta = \frac{(\alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2)\zeta_2 + (\alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2)}{(\gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2)\zeta_2 + (\gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2)};$$

i parametri della rotazione risultante, mercè la quale da ζ si passa a ζ_2, sono, in conseguenza,

$$(21) \quad \begin{cases} \alpha = \alpha_1 \alpha_2 + \beta_1 \gamma_2, & \beta = \alpha_1 \beta_2 + \beta_1 \delta_2 \\ \gamma = \gamma_1 \alpha_2 + \delta_1 \gamma_2, & \delta = \gamma_1 \beta_2 + \delta_1 \delta_2. \end{cases}$$

Questo risultato si esprime più compendiosamente ponendo

$$(22) \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \delta_1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha_2 & \beta_2 \\ \gamma_2 & \delta_2 \end{vmatrix}$$

e convenendo di moltiplicare, a secondo membro, costantemente le linee del primo per le colonne del secondo. Risulta subito la non invertibilità delle due rotazioni; inoltre, sostituendo ad $\alpha, \beta, \ldots$, i valori (20) possiamo avere, con semplici calcoli, l'ampiezza della rotazione e i coseni dell'asse di rotazione in funzione degli elementi analoghi delle rotazioni componenti; otteniamo con ciò:

$$\cos \omega = \cos \omega_1 \cos \omega_2 - \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2 \cos (1, 2),$$

conforme al § 5;

$$a \operatorname{sen} \omega = a_1 \operatorname{sen} \omega_1 \cos \omega_2$$
$$+ a_2 \cos \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2 - (b_1 c_2 - b_2 c_1) \operatorname{sen} \omega_1 \operatorname{sen} \omega_2, \text{ ecc.}$$

Se la seconda rotazione riconduce il punto P_1 nella posizione primitiva P, essa dicesi *inversa* della prima. Dovendo essere

$$\alpha = \delta = 1, \quad \beta = \gamma = 0,$$

dalle (21) si deduce

$$\alpha_2 = \delta_1; \quad \beta_2 = -\beta_1, \quad \gamma_2 = -\gamma_1, \quad \delta_2 = \alpha_1,$$

cioè i parametri della rotazione inversa si ottengono scambiando tra loro α_1 e δ_1 e cambiando il segno agli altri due.

Ciò del resto è anche evidente così: scambiando la terna x, y, z con x_1, y_1, z_1, l'angolo ϑ si muta in $-\vartheta$; φ in $-\psi$ e ψ in $-\varphi$ come risulta subito dalle (7) e (8); quindi, dalle (9), risulta che α si muta in δ, e β e γ cambiano segno.

La regola espressa dalla (22) si estende facilmente alla composizione di più rotazioni intorno ad assi concorrenti *.

* La considerazione dei parametri α, β, ..., che potrebbe farsi risalire a GAUSS e WEIERSTRASS, è stata fatta esplicitamente da CASPARY, mem. citata, e poi dal KLEIN e SOMMERFELD [*Theorie des Kreisels* (Leipzig, 1898)], che ne hanno mostrato tutta la importanza nello studio della rotazione.

Le formule esposte permettono anche di assegnare le formule per la composizione dei moti finiti. Vedi una mia Nota negli Annali di Matem. (2), **26** (1897).

Esercizi.

1. Comporre due rotazioni di 180° intorno a due assi ortogonali; e tre rotazioni di 90° intorno a tre assi ortogonali.

Basta applicare la regola del § 5; nel primo caso si ha una rotazione di 180° intorno ad un asse normale ai primi due; nel secondo caso, se i tre assi sono x, y, z, si ottiene una rotazione di 90° intorno ad y.

2. Comporre tre rotazioni $2\omega_1$, $2\omega_2$, $2\omega_3$ intorno a tre assi ortogonali.

Poniamo $c_r = \cos\omega_r$, $s_r = \operatorname{sen}\omega_r$; i parametri della rotazione intorno ad x sono (form. 20)

$$\alpha_1 = c_1, \quad \beta_1 = is_1, \quad \gamma_1 = is_1, \quad \delta_1 = c_1$$

e così:

$$\alpha_2 = c_2, \quad \beta_2 = -s_2, \quad \gamma_2 = s_2, \quad \delta_2 = c_2$$

$$\alpha_3 = c_3 + is_3, \quad \beta_3 = \gamma_3 = 0, \quad \delta_3 = c_3 + is_3.$$

Applicando successivamente la (22) si trova

$$\cos\omega = c_1 c_2 c_3 + s_1 s_2 s_3; \quad a \operatorname{sen}\omega = s_1 c_2 c_3 - c_1 s_2 s_3$$
$$b \operatorname{sen}\omega = s_2 c_3 c_1 + c_2 s_3 s_1; \quad c \operatorname{sen}\omega = s_3 c_1 c_2 - c_3 s_1 s_2.$$

3. Decomporre una rotazione $2\omega(a, b, c)$ in altre tre secondo tre assi ortogonali.

Basterà assegnare le ampiezze delle componenti. Da formule di esercizio precedente si trae

$$a \operatorname{sen} 2\omega + 2bc \operatorname{sen}^2\omega = 2c_1 s_1 (c_2^2 - s_2^2)$$
$$b \operatorname{sen} 2\omega - 2ca \operatorname{sen}^2\omega = 2c_2 s_2 = \operatorname{sen} 2\omega_2$$
$$c \operatorname{sen} 2\omega + 2ab \operatorname{sen}^2\omega = 2c_3 s_3 (c_2^2 - s_2^2);$$

inoltre

$$1 - 2(a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\omega = (c_1^2 - s_1^2)(c_2^2 - s_2^2); \text{ ecc.}$$

onde:

$$\operatorname{tg}2\omega_1 = \frac{a\operatorname{sen}2\omega + 2bc\operatorname{sen}^2\omega}{1 - 2(a^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\omega}, \quad \operatorname{tg}2\omega_3 = \frac{c\operatorname{sen}2\omega + 2ab\operatorname{sen}^2\omega}{1 - 2(c^2 + b^2)\operatorname{sen}^2\omega}.$$

4. Ad una rotazione 2ω intorno ad un asse di coordinate $\alpha, \beta, \gamma, \lambda, \mu, \nu$ si può sostituire una rotazione intorno ad un asse parallelo $\alpha, \beta, \gamma, \lambda', \mu', \nu'$ e una traslazione 2τ lungo un asse normale. Trovare 2τ e i coseni a, b, c della traslazione.

Dall'ultima costruzione del § 5, se ρ è la distanza tra i due assi, si deduce

$$\tau = \rho \operatorname{sen} \omega$$

$$\rho a = \operatorname{sen} \omega [\beta(\nu - \nu') - \gamma(\mu - \mu')] + \cos \omega (\lambda - \lambda'); \text{ ecc.}$$

5. Trovare gli elementi (rotazione e traslazione) del moto elicoidale risultante di due rotazioni $2\omega_1(\alpha_1, \beta_1, \ldots \nu_1)$ e $2\omega_2(\alpha_2, \beta_2, \ldots \nu_2)$.

Alla seconda delle due rotazioni si può sostituire una rotazione intorno ad un asse parallelo e passante per un punto del primo, seguìta da una traslazione. Componendo le due rotazioni e proiettando la traslazione sull'asse della rotazione risultante si ha la traslazione richiesta. Quindi colle formule dell'esercizio precedente si trova anzitutto

$$\tau \operatorname{sen} \omega$$

$$= s_2 \sum \{s_2 [\beta_2(\nu_2 - \nu_2') - \gamma_2(\mu_2 - \mu_2')] + c_2(\lambda_2 - \lambda_2')\} \times$$

$$\times [c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2],$$

dalla quale, per essere

$$\alpha_1 \lambda_2' + \ldots + \alpha_2 \lambda_1 + \ldots = 0,$$

si deduce

$$\tau \operatorname{sen} \omega = s_1 s_2 [1, 2];$$

inoltre

$$\alpha \operatorname{sen} \omega = c_2 s_1 \alpha_1 + c_1 s_2 \alpha_2 - (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) s_1 s_2; \text{ ecc.}$$

$$\lambda \operatorname{sen} \omega + \tau \alpha \cos \omega = c_2 s_1 \lambda_1 + c_1 s_2 \lambda_2$$

$$- [(\beta_1 \nu_2 - \beta_2 \nu_1) - (\gamma_1 \mu_2 - \gamma_2 \mu_1)] s_1 s_2; \text{ ecc.}$$

6. Ad un dato moto elicoidale si può in infiniti modi sostituire il sistema di due rotazioni finite. Il sestuplo volume del tetraedro avente per

spigoli opposti s_1 ed s_2 sui due assi è costante. (Teorema di RODRIGUES).

Discende immediatamente dalle formule dell'esercizio precedente.

7. Sono date tre rette A_{12}, A_{23}, A_{31}; sia D_1 la minima distanza tra A_{12} e A_{13}; D_2 quella tra A_{12} e A_{23}; D_3 quella tra A_{13} e A_{23}.

Intorno alla prima si effettua un moto elicoidale la cui traslazione è doppia della distanza tra D_1 e D_2 e la cui rotazione è il doppio dell'angolo compreso tra D_1 e D_2; e così per la seconda e terza.

Questi tre moti elicoidali hanno per prodotto l'unità. (Teorema di HALPHEN).

Dopo il moto elicoidale intorno A_{12} il sistema rigido da S_1 passi in S_2; la retta D_1 assuma la posizione D.

(*Fig. 6*)

Facciamo ruotare S_1 di π intorno D_1; otterremo una posizione S simmetrica, in cui A_{12} avrà cambiato senso; facciamo ancora ruotare S, di π, intorno a D_2; A_{12} subirà un nuovo cambiamento di senso e D_1 verrà in D; dunque otterremo S_2. Lo stesso si faccia per A_{23}; da S_2 otterremo S_3 ed entrambe saranno simmetriche

di una figura S' rispetto D_2 e D_3; quindi S' coincide con S; però col terzo moto intorno A_{13} da S_3 si torna in S_1.

Si conclude pure: *tre posizioni di un sistema rigido sono simmetriche di uno stesso sistema rispetto a tre rette.*

[Nouvelles Ann. (3), **I** (1882), pag. 296].

8. Date tre coppie di punti corrispondenti A, B, C ed A_1, B_1, C_1 di due diverse posizioni di un sistema rigido, costruire l'asse di moto elicoidale.

Sia P un punto del piano ABC; P_1 il suo corrispondente; conducendo da O i segmenti $OA_2, \ldots$ equipollenti ad AA_1, BB_1, CC_1, PP_1, i punti A_2, B_2, C_2, P_2 giacciono in un piano. Basta riflettere che

$$P = \alpha A + \beta B + \gamma C, \text{ ecc.}$$

e quindi

$$P_1 - P = P_2 - O = \alpha(A_1 - A) + \ldots = \alpha(A_2 - O) + \ldots.$$

Se la OP_2 è normale al piano $A_2 B_2 C_2$ e si sceglie P in modo che le AP, ecc. dividano i lati opposti $BC, \ldots$ nello stesso rapporto in cui $A_2 P_2, \ldots$ dividono $B_2 C_2, \ldots$; la PP_1 risulta eguale e parallela a OP_2; e però PP_1 è l'asse richiesto.

[Mehmke, Civilingenieur (1883); Zeitschrift f. Mathem. **44** (1899)].

9. Nel moto finito di un corpo rigido intorno ad un punto fisso, trovare le equazioni dell'asse di rotazione.

Si ha in generale

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z;$$

ma per i punti dell'asse: $x_1 = x$, ecc.; onde si ottengono tre equazioni

$$(a_1 - 1)x + b_1 y + c_1 z = 0; \text{ ecc.},$$

che rappresentano tre piani aventi una retta in comune. Infatti il determinante è nullo; ciò che provasi o collo svi-

luppo diretto, oppure moltiplicandolo pel determinante $+1$ della sostituzione ortogonale; con che il determinante suddetto risulta cambiato di segno.

Considerando 2^a e 3^a equazione, si ha:

$$x : y : z = 1 + a_1 - b_2 - c_3 : a_2 + b_1 : a_3 + c_1 \text{ ; ecc.}$$

e di qui

$$x^2 : y^2 : z^2 = 1 + a_1 - b_2 - c_3 : 1 - a_1 + b_2 - c_3 : 1 - a_1 - b_2 + c_3 .$$

Sostituendo invece nelle equazioni suddette ad a_1, b_1, c_1, ecc. le (14) si vedrebbe subito che esse sono soddisfatte da $x \equiv \lambda$, $y \equiv \mu$, $z \equiv \nu$.

10. Posto

$$\xi = x + iy, \qquad \eta = -x + iy, \qquad \zeta = -z,$$
$$\xi_1 = x_1 + iy_1, \qquad \eta_1 = -x_1 + iy_1, \qquad \zeta_1 = -z_1;$$

esprimere le ξ_1, η_1, ζ_1 mediante ξ, η, ζ, e viceversa.

Si ha

$$\xi = (a_1 + ib_1)x_1 + (a_2 + ib_2)y_1 + (a_3 + ib_3)z_1$$

e per le (10) ed (11)

$$\xi = \alpha^2\xi_1 + \beta^2\eta_1 + 2\alpha\beta\zeta_1$$

e così

$$\eta = \gamma^2\xi_1 + \delta^2\eta_1 + 2\gamma\delta\zeta_1$$
$$\zeta = \alpha\gamma\xi_1 + \beta\delta\eta_1 + (\alpha\delta + \beta\gamma)\zeta_1 .$$

Considerando il moto inverso e quindi scambiando α con δ e mutando segno a β e γ si otterranno le formule inverse. Si può anche osservare che il determinante di questo sistema ha per valore $+1$.

(KLEIN u. SOMMERFELD, l. c., pag. 91).

11. Ricerca degli elementi della rotazione mediante ξ, η, ζ.

Se la rotazione 2ω avvenisse intorno z, avremmo

$$z_1 = z, \qquad x_1 \pm iy_1 = e^{\pm 2i\omega}(x \pm iy);$$

dunque le ξ, η, ζ dei punti delle rette

$$x = y = 0; \quad z = 0, \; x + iy = 0; \quad z = 0, \; x - iy = 0$$

acquistano nella rotazione uno dei tre fattori 1, $e^{\pm 2i\omega}$; indi-

cando con k uno qualunque di essi, si ha $\xi = k\xi_1$; ecc. e le equazioni dell'esercizio precedente diventano

$$(\alpha^2 - k)\xi_1 + \beta^2\eta_1 + 2\alpha\beta\zeta_1 = 0, \text{ ecc.}$$

Ponendo eguale a zero il determinante e sviluppando risulta

$$k^3 - Ak^2 + Bk + 1 = 0,$$

dove $A = \alpha^2 + \delta^2 + \alpha\delta + \beta\gamma = (\alpha + \delta)^2 - 1$

$$B = (\alpha\delta + \beta\gamma)\delta^2 - 2\beta\gamma\delta^2 + \ldots = A;$$

esclusa quindi la radice 1, l'equazione quadratica risultante ha per radici $e^{\pm 2i\omega}$; onde

$$e^{2i\omega} + e^{-2i\omega} = 2\cos 2\omega = (\alpha + \delta)^2 - 2,$$

donde $$4\cos^2\omega = (\alpha + \delta)^2$$

come dalle (20).

(KLEIN u SOMMERFELD, l. c., p. 35).

12. Trovare i parametri razionali della rotazione risultante di due altre.

Applicando le (12) e le (21) si trova subito

$$\lambda = \sigma(\lambda_1 + \lambda_2 + \mu_1\nu_2 - \mu_2\nu_1);\ \text{ecc.}$$

dove $$1 : \sigma = 1 - \lambda_1\lambda_2 - \mu_1\mu_2 - \nu_1\nu_2.$$

CAPITOLO QUARTO.

ANALISI DEL MOTO ISTANTANEO DI UN SISTEMA RIGIDO.

§ 1. **Moto assoluto e relativo.** — Si considerino due sistemi rigidi S_1 ed S rispettivamente riferiti ad $O_1(I_1, J_1, K_1)$ e $O(I, J, K)$; il primo dei quali è da riguardarsi come fisso; mobile il secondo.

Il moto di un punto P rispetto ad S_1 dicesi *assoluto*; rispetto ad S dicesi *relativo*. Finalmente il moto di un punto rigidamente connesso con S, rispetto ad S_1, dicesi di *strascinamento*.

I tre vettori fondamentali I, J, K sono funzioni del tempo; derivando la

$$J|K = 0,$$

possiamo porre:

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot{J}|K = - J|\dot{K} = p \\ \dot{K}|I = - K|\dot{I} = q \\ \dot{I}|J = - I|\dot{J} = r, \end{array} \right.$$

p, q, r essendo funzioni del tempo, e di dimensione -1.

D'altra parte il vettore $\dot{I}$ perpendicolare ad I è parallelo ad J e K, dunque

$$\dot{I} = a\,J + b\,K.$$

Moltiplicando scalarmente per J e poi per K, si deduce

$$\dot{I}|J = a = r, \quad \dot{I}|K = b = -q,$$

quindi

(2) $\dot{I} = r\,J - q\,K, \quad \dot{J} = p\,K - r\,I, \quad \dot{K} = q\,I - p\,J.$

§ 2. **Velocità, accelerazione assoluta e relativa.** — Diciamo x, y, z le coordinate di P nel sistema I, J, K; abbiamo

(3) $$P = O + I\,x + J\,y + K\,z.$$

La velocità di un punto che all'istante t coincida con P e sia rigidamente connesso col sistema S, velocità di strascinamento, è data dalla derivata di P supponendo fisse le x, y, z; indicandola con $\dot{P}_s$ si ha

(4) $$\dot{P}_s = \dot{O} + \dot{I}\,x + \dot{J}\,y + \dot{K}\,z.$$

La velocità relativa è data dalla derivata di P, quando si supponga fisso il sistema S e variabile, rispetto a questo, il punto; indicandola con $\dot{P}_r$, avremo

(5) $$\dot{P}_r = I\,\dot{x} + J\,\dot{y} + K\,\dot{z}.$$

E poichè la velocità assoluta $\dot{P}_a$ si ottiene dalla (3) derivando rispetto a t, così otteniamo

(6) $$\dot{P}_a = \dot{P}_r + \dot{P}_s;$$

la velocità assoluta è la risultante della velocità di strascinamento e relativa.

Sostituendo in (4) i valori (2) si ottiene

$$(7)\qquad \dot{P}_s = \dot{O} + \begin{vmatrix} I & J & K \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix};$$

di guisa che se Ω è un vettore applicato in O e le cui componenti, nel sistema I, J, K, sono p, q, r, allora

$$(7')\qquad \dot{P}_s = \dot{O} + |\Omega(P - O).$$

Se, nello stesso sistema, diciamo u_0, v_0, w_0 le componenti della velocità dell'origine; v_{sx}, ... quelle di $\dot{P}_s$, deduciamo le formule fondamentali *

$$(8)\qquad \begin{cases} v_{sx} = u_0 + qz - ry \\ v_{sy} = v_0 + rx - pz \\ v_{sz} = w_0 + py - qx. \end{cases}$$

Nella ipotesi che O coincida con O_1; $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ e se diciamo p_1, q_1, r_1 le componenti di Ω secondo gli assi x_1, y_1, z_1, dalla (7') si deduce pure:

$$(8')\qquad \begin{cases} v_{sx_1} = q_1 z_1 - r_1 y_1, \quad v_{sy_1} = r_1 x_1 - p_1 z_1, \\ v_{sz_1} = p_1 y_1 - q_1 x_1. \end{cases}$$

Per un punto P immobile nello spazio, essendo $\dot{P}_a = 0$, sarà

$$\dot{P}_r + \dot{P}_s = 0,$$

e quindi rispetto agli assi mobili:

---

* EULER (*Découverte d'un nouveau principe de Mécanique*) le ha date nel caso di O fisso (Mém. de l'Ac. de Berlin, 1750, p. 185; vedi spec. pag. 205).

$$\frac{dx}{dt} + qz - ry = 0, \text{ ecc.}$$

Passiamo alle accelerazioni.

L'accelerazione di strascinamento e relativa sono, rispettivamente,

$$(9) \qquad \begin{cases} \ddot{P}_s = \ddot{O} + x\ddot{I} + y\ddot{J} + z\ddot{K}, \\ \ddot{P}_r = \ddot{x}I + \ddot{y}J + \ddot{z}K; \end{cases}$$

poniamo ancora

$$(10) \qquad \ddot{P}_c = 2(\dot{x}\dot{I} + \dot{y}\dot{J} + \dot{z}\dot{K});$$

$\ddot{P}_c$, che ha le dimensioni $[l, t^{-2}]$, dicesi accelerazione *centrifuga composta*. Ma dalla (4), con una nuova derivazione, si deduce

$$(11) \qquad \ddot{P}_a = \ddot{P}_s + \ddot{P}_r + \ddot{P}_c;$$

l'accelerazione assoluta è la risultante dell'accelerazione di strascinamento, relativa e centrifuga composta *.

Sostituendo in (10) le (2), si ha

$$(12) \qquad \ddot{P}_c = 2\begin{vmatrix} I & J & K \\ p & q & r \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{vmatrix} = 2|\Omega \dot{P}_r;$$

l'accelerazione centrifuga composta è il doppio prodotto vettoriale di Ω *e della velocità relativa.*

Per ottenere sotto forma più opportuna l'accelerazione di strascinamento deriviamo la (7), te-

---

* Coriolis, *Mém. sur les équations du mouvement relatif*, etc. [J. de l'Éc. Polytech. Cah. **24** (1835), pp. 142-154]. L'origine del nome sarà indicata nella 3ª parte.

nendo costanti x, y, z; si ha:

$$\ddot{P}_s = \ddot{O} + \begin{vmatrix} I & J & K \\ \dot{p} & \dot{q} & \dot{r} \\ x & y & z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \dot{I} & \dot{J} & \dot{K} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix};$$

nel secondo determinante, sostituendo le (2), il coefficiente di I risulta

$$p(px + qy + rz) - \omega^2 x = \frac{\partial \Phi}{\partial x},$$

dove

$$\omega^2 = \text{mod}\, \Omega = p^2 + q^2 + r^2$$

$$(13)\quad 2\Phi = (px + qy + rz)^2 - \omega^2 (x^2 + y^2 + z^2);$$

lo stesso dicasi pel coefficiente di J e di K.

Se quindi accenniamo, per ora, con $(w_{sx})_0, \ldots$ le componenti di $\ddot{O}$; con $w_{sx}, \ldots$ quelle di $\ddot{P}_s$, abbiamo:

$$w_{sx} = (w_{sx})_0 + \dot{q}z - \dot{r}y + \frac{\partial \Phi}{\partial x};\ \text{ecc.}$$

Possiamo ancora stabilire altre importanti formule; consideriamo perciò l'odografo del moto assoluto di P, rispetto ad una origine qualunque fissa O_1, ponendo

$$Q = \dot{P}_a + O_1.$$

La velocità di Q è l'accelerazione assoluta di P; quindi, applicando la (6) e (7'),

$$\ddot{P}_a = \text{vel. rel. } \dot{P}_a + \text{vel. rel. } O_1 + \dot{O} + |\Omega(Q - O).$$

Ma esprimendo che O_1 è un punto fisso nello spazio, otteniamo

$$\text{vel. rel. } O_1 + \dot{O} + |\Omega(O_1 - O) = 0;$$

e sottraendo dalla precedente:

(14) $\ddot{P}_a = \text{vel. rel. } \dot{P}_a + |\Omega \dot{P}_a .$

Così, se ci riferiamo ad assi x, y, z connessi con S, otteniamo *

$$(15)\quad \begin{cases} w_{ax} = \dfrac{d v_{ax}}{dt} + q v_{az} - r v_{ay} \\ w_{ay} = \dfrac{d v_{ay}}{dt} + r v_{ax} - p v_{az} \\ w_{az} = \dfrac{d v_{az}}{dt} + p v_{ay} - q v_{ax} . \end{cases}$$

Sostituendo nella prima di queste i valori di v_r e le (8), e paragonando poscia con il valore già trovato per w_{sx}, si deduce

$$(w_{sx})_0 = \frac{d u_0}{dt} + q w_0 - r v_0 ; \text{ ecc.}$$

Quindi

$$(16)\begin{cases} w_{sx} = \dfrac{d u_0}{dt} + q w_0 - r v_0 + \dot{q} z - \dot{r} y + \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ w_{sy} = \dfrac{d v_0}{dt} + r u_0 - p w_0 + \dot{r} x - \dot{p} z + \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} \\ w_{sz} = \dfrac{d w_0}{dt} + p v_0 - q u_0 + \dot{p} y - \dot{q} x + \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} . \end{cases}$$

Le formule (8), (15), (16) sono fondamentali.

Osserviamo poi che per tutte le trasforma-

* Bour, *Mém. sur les mouvements relatifs* [J. de Liouville (2), **8** (1863), pag. 8]. La memoria è del 1856 e vi compariscono le (15) sotto forma poco diversa.

zioni ortogonali che lasciano inalterato O, Φ è invariante; perchè

$$px+qy+rz=\Omega|(P-O),\quad x^2+y^2+z^2=(P-O)^2.$$

§ 3. **Formule di Poisson.** — Il sistema I, J, K sia definito, rispetto I_1, J_1, K_1, dai nove coseni direttori del Cap. 3°, § 6; allora

$$I = a_1 I_1 + b_1 J_1 + c_1 K_1;\ \text{ecc.}$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\dot{I} = \dot{a}_1 I_1 + \dot{b}_1 J_1 + \dot{c}_1 K_1;$$

ma il primo membro, per le (2), è uguale a

$$rJ - qK = r(a_2 I_1 + b_2 J_1 + c_2 K_1) \\ - q(a_3 I_1 + b_3 J_1 + c_3 K_1);$$

eguagliando i coefficienti di I_1, ..., e facendo lo stesso per le altre si hanno le

$$(17)\quad \dot{a}_1=ra_2-qa_3;\ \dot{a}_2=pa_3-ra_1;\ \dot{a}_3=qa_1-pa_2,$$

ed altre sei che da queste si deducono mutando a in b e in c.

Le derivate dei nove coseni si esprimono mediante i coseni e le p, q, r.

Dalle (17) poi si ricava inversamente:

$$p = a_3\dot{a}_2 + b_3\dot{b}_2 + c_3\dot{c}_2 = -(\dot{a}_3 a_2 + \dot{b}_3 b_2 + \dot{c}_3 c_2),$$

ecc.; che, del resto, risultano subito dalle definizioni (1).

Si può stabilire un sistema analogo, ma formato colle p_1, q_1, r_1.

Infatti

$$p = a_1 p_1 + b_1 q_1 + c_1 r_1,\quad q = a_2 p_1 + b_2 q_1 + c_2 r_1, \\ r = a_3 p_1 + b_3 q_1 + c_3 r_1;$$

sostituendo nelle (17), si trova

(17') $\dot{a}_1 = q_1 c_1 - r_1 b_1$; $\dot{b}_1 = r_1 a_1 - p_1 c_1$; $\dot{c}_1 = p_1 b_1 - q_1 a_1$,

ed altre sei che si ottengono mutando (nelle a, b, c) l'indice 1 in 2 e 3.

Le (17) e (17') diconsi *formule di* POISSON.

§ 4. Composizioni dei moti simultanei ed istantanei. — Più moti elicoidali istantanei e relativi allo stesso istante si dicono simultanei. Applicando il teorema espresso dalla (6) successivamente a due, tre, ecc. moti, si conclude che la velocità totale di un punto del sistema è la risultante delle singole velocità dei moti istantanei componenti. Quindi, per rispetto alle velocità, è indifferente l'ordine con cui si compongono i moti componenti; cioè:

Più moti istantanei simultanei sono invertibili.

Questa semplice e generale proprietà permette di assegnare, come vedremo, le formule risolutive finali.

Per le traslazioni vale ancora il teorema generale del Cap. 3°, § 5.

I moti istantanei siano rotazioni intorno ad assi concorrenti in O (a distanza finita o infinita) e le cui rispettive velocità angolari siano ω_1, ω_2, ... Un punto P del sistema, in virtù delle singole rotazioni, ha velocità rappresentate da

$$|\Omega_1 (P - O), \quad |\Omega_2 (P - O), \ldots$$

(Cap. 3°, § 2). La velocità risultante è

$$|(\Omega_1 + \Omega_2 + \cdots)(P - O);$$

e se poniamo

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \cdots$$

il moto risultante equivarrà ad una rotazione istantanea intorno ad un asse concorrente coi primi e il cui vettore rappresentativo è la risultante dei vettori delle singole velocità angolari.

Cioè le rotazioni suddette si compongono e decompongono come i vettori. In particolare, ad una rotazione istantanea intorno ad Ω si possono sostituire tre rotazioni intorno a tre assi uscenti da O; e se essi sono ortogonali, le velocità angolari sono

$$\omega\alpha, \quad \omega\beta, \quad \omega\gamma$$

α, β, γ, essendo i coseni di Ω, ed ω il suo modulo.

Nel caso di una coppia di due rotazioni istantanee, cioè di due rotazioni intorno a due assi paralleli e di velocità eguali e di senso contrario, la velocità di un punto P nel moto risultante è eguale al momento della coppia; quindi è sempre la stessa qualunque sia P; dunque:

Una coppia di due rotazioni istantanee equivale ad una traslazione istantanea la cui velocità è eguale al momento della coppia; una traslazione istantanea si può in infiniti modi sostituire con una coppia di due rotazioni.

Assumendo ora una origine O, la composizione di più moti elicoidali si può fare come quella dei vettori localizzati (Cap. 1°, § 7).

Intorno ad un asse di coordinate (α, β, γ, λ, μ, ν) si effettua una rotazione istantanea di velocità angolare ω. Per l'origine O sia condotta una parallela all'asse; il moto istantaneo risultante della rotazione, di velocità angolare ω, intorno a questa parallela, e di una traslazione istantanea la cui velocità è il momento di Ω (vettore applicato in un punto dell'asse) rispetto ad O, è precisamente la prima rotazione. Dunque:

Ad una rotazione Ω intorno ad un asse qualunque si può sostituire una rotazione intorno ad un asse parallelo condotto per O e di stessa velocità angolare, e una traslazione eguale al momento di Ω rispetto O.

Alla rotazione istantanea intorno all'asse per O, possiamo sostituire tre rotazioni intorno agli assi e di velocità angolari

$$\omega\alpha, \quad \omega\beta, \quad \omega\gamma;$$

alla traslazione potremo del pari sostituire tre traslazioni secondo gli assi e le cui velocità, cioè le componenti del momento, sono (Cap. 1°, § 9)

$$\omega\lambda, \quad \omega\mu, \quad \omega\nu;$$

ad una rotazione istantanea di velocità angolare ω intorno ad un asse (α, β, ... ν) si possono sostituire tre rotazioni e tre traslazioni istantanee lungo la terna fondamentale e le cui velocità rispettive sono le coordinate

$$\omega\alpha, \quad \omega\beta, \quad \omega\gamma, \quad \omega\lambda, \quad \omega\mu, \quad \omega\nu,$$

del vettore Ω.

Se intorno lo stesso asse si effettuasse una traslazione istantanea τ, questa si decomporrebbe in tre traslazioni $\tau\alpha$, $\tau\beta$, $\tau\gamma$ lungo gli assi, da aggiungere alle altre tre $\omega\lambda$, ...

Possiamo, dopo ciò, applicare tutto quanto è stato detto sulla composizione dei vettori; non solo, ma possiamo risolvere pei moti elicoidali istantanei il problema generale della composizione.

Siano, per maggior semplicità, da comporre delle rotazioni istantanee di velocità angolari ω_1, ω_2, ... intorno ad assi $\alpha_1, \beta_1, \ldots \nu_1$; $\alpha_2, \beta_2, \ldots \nu_2$, ecc. A queste sostituiremo, col teorema precedente, tante rotazioni e traslazioni lungo gli assi, che, a loro volta, si compongono in tre rotazioni e tre traslazioni sole di velocità eguali alle somme; cioè

$$\omega_x = \omega_1 \alpha_1 + \omega_2 \alpha_2 + \cdots; \text{ ecc.}$$

$$\tau_x = \omega_1 \lambda_1 + \omega_2 \lambda_2 + \cdots; \text{ ecc.}$$

Siano ω, τ $(\alpha, \beta, \ldots \nu)$ gli elementi del moto elicoidale risultante; a questo potremo sostituire, del pari, tre rotazioni secondo gli assi e di velocità angolari

$$\omega\alpha, \quad \omega\beta, \quad \omega\gamma;$$

e tre traslazioni di velocità

$$\omega\lambda + \tau\alpha, \; \omega\mu + \tau\beta, \; \omega\nu + \tau\gamma;$$

quindi avremo:

$$\omega\alpha = \omega_1 \alpha_1 + \omega_2 \alpha_2 + \cdots, \text{ ecc.}$$

$$\omega\lambda + \tau\alpha = \omega_1 \lambda_1 + \omega_2 \lambda_2 + \cdots, \text{ ecc.}$$

Quadrando e sommando le prime tre si de-

duce

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \cdots + 2\,\omega_1\,\omega_2 \cos(1,\ 2) + \cdots;$$

e quindi troveremo α, β, γ; moltiplicando invece prima e quarta, ecc., e sommando, si ha (pag. 24)

$$\tau = [\omega_1,\ \omega_2] + [\omega_1,\ \omega_3] + \cdots,$$

e quindi troveremo λ, μ, ν.

§ 5. **Analisi del moto istantaneo di un sistema rigido.** — Sia $S(O;\ I,\ J,\ K)$ un sistema rigido in moto; la velocità di un punto P di questo sistema è espressa dalla (7) o (7′) del § 2, e che ora, non essendo possibili confusioni, scriveremo così

$$\dot{P} = \dot{O} + |\Omega(P - O).$$

Il moto istantaneo del sistema, per rispetto alle velocità, può quindi riguardarsi come risultante di due altri: in uno di questi la velocità di un punto qualunque è costante ed eguale a quella di O; tale moto quindi corrisponde ad una traslazione istantanea di velocità $\dot{O}$; nell'altro ogni punto ha per velocità il momento di Ω rispetto P; e corrisponde quindi ad una rotazione istantanea intorno $\mathbf{\Omega}$ e la cui velocità angolare è il mod. $\mathbf{\Omega}$. Quindi:

Il moto istantaneo di un sistema rigido si può pensare decomposto (ed in infiniti modi) in un moto istantaneo di rotazione ed in uno di traslazione.

Riferendoci poscia alle (8):

Il moto suddetto si può decomporre in tre moti istantanei di traslazione le cui velocità secondo gli assi sono u_0, v_0, w_0, e tre moti istantanei di rota-

zione intorno agli stessi e di velocità angolari p, q, r.

Perciò le p, q, r, componenti di Ω, diconsi *velocità angolari secondo gli assi.*

I movimenti istantanei precedenti (§ 6) componendosi in un moto elicoidale istantaneo, concludiamo:

Il moto istantaneo di un sistema rigido equivale ad un moto elicoidale *.

L'asse di questo moto elicoidale dicesi anche *asse istantaneo di rotazione e scorrimento.* Esso è parallelo ad Ω; la velocità istantanea di rotazione è sempre mod Ω; quella di traslazione lungo l'asse è la proiezione di $\dot{O}$ su Ω, cioè

$$\frac{1}{\omega}(p u_0 + q v_0 + r w_0);$$

quindi il parametro (Cap. 3°, § 3) h di questo moto è

---

* Questo teorema è stato scoperto, come tutti gli altri relativi al moto istantaneo, assai prima del suo analogo per i moti finiti. È stato enunciato, ma imperfettamente dimostrato, da G. Mozzi, matematico fiorentino (1730-1813), nel *Discorso matematico sopra il rotamento momentaneo dei corpi* (Napoli, 1763); poi ritrovato da Cauchy nella memoria fondamentale: *Sur les mouvements que peut prendre un système invariable,* etc. [Exerc. de Mathém. Anc. Exer. Seconde année (1827). Œuvres compl. (2), **7**, pag. 120]; e quindi da Chasles e Giorgini nelle memorie già citate a pag. 63.

$$\frac{1}{\omega^2}(p u_0 + q v_0 + r w_0).$$

Se esso è nullo, cioè se

$$p u_0 + q v_0 + r w_0 = 0,$$

senza che siano contemporaneamente nulli p, q, r, il moto equivale ad una rotazione istantanea.

Le formule (8), messe a confronto con le (34) del Cap. 1°, ricevono un'altra interpretazione. Se infatti consideriamo un sistema di vettori localizzati le cui coordinate sono

$$p, \quad q, \quad r, \quad u_0, \quad v_0, \quad w_0,$$

il momento del punto P rispetto questo sistema di vettori ha per componenti sugli assi, $v_{sx}, \ldots$; onde:

La velocità di un punto di un sistema rigido è il momento rispetto al punto di un sistema di vettori.

Il vettore che rappresenta la velocità angolare di rotazione corrisponde al vettore risultante e la velocità di traslazione corrisponde al momento risultante del sistema. L'asse di moto elicoidale corrisponde all'asse centrale del sistema e quindi le sue equazioni sono

$$u_0 + qz - ry : v_0 + rx - pz : w_0 + py - qx = p : q : r.$$

Esercizi.

1. Trovare l'asse di moto elicoidale risultante di due rotazioni istantanee e il luogo dell'asse

quando varia il rapporto tra le due velocità angolari.

L'asse z sia la minima distanza $2a$ tra i due assi; l'origine sia il punto di mezzo e i piani zx e zy siano i piani bisettori dell'angolo, 2φ, tra i due assi.

Colle notazioni e col metodo del § 4, si hanno le equazioni:

$$(\omega_1 + \omega_2)\cos\varphi = \omega\alpha, \quad (\omega_1 - \omega_2)\operatorname{sen}\varphi = \omega\beta, \quad \gamma = 0$$
$$-a(\omega_1 + \omega_2)\operatorname{sen}\varphi = \omega\lambda + \tau\alpha,$$
$$a(\omega_1 - \omega_2)\cos\varphi = \omega\mu + \tau\beta, \quad \nu = 0.$$

L'asse richiesto incontra ad angolo retto l'asse z in un punto di ordinata z; sia ψ l'angolo con asse x. Le due ultime equazioni diventano:

$$-a(\omega_1 + \omega_2)\operatorname{sen}\varphi = \tau\cos\psi - \omega z \operatorname{sen}\psi,$$
$$a(\omega_1 - \omega_2)\cos\varphi = \tau\operatorname{sen}\psi + \omega z\cos\psi;$$

donde

$$z = \frac{a}{\operatorname{sen} 2\varphi}\operatorname{sen} 2\psi;$$

ma $y : x = \operatorname{tang}\psi$; eliminando ψ si ha la superficie *(cilindroide)*

$$z(x^2 + y^2) = \frac{2a}{\operatorname{sen} 2\varphi} x y;$$

inoltre

$$\frac{a+z}{a-z} = \frac{\operatorname{tang}(\varphi+\psi)}{\operatorname{tang}(\varphi-\psi)} = \frac{\operatorname{tang}(r_1 r)}{\operatorname{tang}(r_2 r)}.$$

(Vedi Eserciz. 18 del Cap. I. Parte 2ª).

2. Nel moto istantaneo di un sistema rigido:

a) la velocità dei punti di una retta, secondo la retta stessa, è costante;

b) i piani normali alle velocità dei punti di una retta inviluppano un'altra retta (coniugata);

c) le rette i cui punti hanno velocità normali

(coniugate di sè stesse) formano un complesso lineare il cui asse è l'asse di moto elicoidale;

d) in ogni piano v'è un punto la cui velocità è normale, ed una retta i cui punti hanno velocità contenute nel piano;

e) i punti la cui velocità è diretta ad un punto stanno su di una cubica gobba; le direzioni delle velocità formano un cono di 2° ordine.

L'asse z sia l'asse di moto elicoidale; $\alpha, \beta, \ldots \nu$ le coordinate di una retta; le componenti della velocità di un punto essendo $-\omega y$, ωx, w_0, la velocità secondo la retta è $\omega\lambda + \gamma w_0$, indipendente cioè dal punto. Se in un punto la velocità è normale alla retta, lo è sempre; tali rette soddisfano la

$$\omega\lambda + \gamma w_0 = 0,$$

onde formano un complesso; dunque è vero *a*) e *c*).

Se r ed r' sono assi di due rotazioni equivalenti al moto elicoidale istantaneo, P e P' due loro punti, la velocità di P è normale al piano Pr' e quella di P' è normale a $P'r$; dunque risulta *b*).

Due rette del complesso si taglino in P; la cui velocità è normale al piano delle due rette, ecc. cioè *d*); P dicesi *fuoco* del piano (*Corrispondenza nulla*). La direzione r della velocità di P ha per coniugata una r' nel piano; i punti di r' hanno velocità contenute nel piano e normali alle congiungenti con P, e che inviluppano una parabola; ecc.

Tutti i teoremi possono dimostrarsi analiticamente partendo dalle semplici espressioni delle componenti della velocità.

Le rette che incontrano due assi di rotazione r, r', appartengono al complesso; vi sono ∞^1 complessi aventi per rette coniugate r ed r'; il luogo dei loro assi è il cilindroide.

3. Cinque punti P_i di un sistema si muovono su cinque superficie date; trovare l'asse di moto elicoidale ed il piano normale alla traiettoria di un altro punto.

Le date condizioni assicurano la mobilità del sistema. Le normali in P_i alle cinque superficie appartengono al complesso corrispondente al moto istantaneo (Eserc. prec.). Consideriamole quattro a quattro; e siano r_1, r'_1 le trasversali comuni alle prime quattro; esse sono rette coniugate; e così r_2, r'_2. La minima distanza tra le minime distanze di r_1, r'_1; r_2, r'_2 è l'asse di moto elicoidale; di ogni punto P è determinato il piano corrispondente, conducendo per P una retta che si appoggi ad r_1, r'_1; ecc.

Si deduce che le cinque rette uscenti da P e che segano le cinque coppie r_1, r'_1; ecc. giacciono in un piano.

4. Intorno a tre assi ortogonali due a due e che non s'incontrano si effettuano tre rotazioni istantanee di velocità ω_1, ω_2, ω_3.

Trovare l'asse di moto elicoidale.

L'asse r_1, parallelo ad x, incontri z alla distanza a_1 da O; l'asse r_2, parallelo ad y, incontri x alla distanza a_2; ecc.

Colle formule del § 4 si ha

$$\omega_1 = \omega\alpha, \text{ ecc.}, \quad a_2\omega_3 = \omega\lambda + \tau\alpha, \text{ ecc.}$$

onde

$$\omega^2 = \omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2, \quad \tau\omega = a_1\omega_2\omega_3 + \dots.$$

5. Un sistema è rigidamente connesso con la terna T, N, B, relativa ad un punto O, di una curva gobba, e che si sposta sulla stessa.

Trovare l'asse di moto elicoidale.

Le componenti di T, N, B, cioè i coseni direttori della terna rispetto ad un'altra, siano a_1, b_1, c_1; ecc.; dalle for-

mule del § 2, e da quelle del § 6, Cap. 1°, si deduce

$$p = vB\left|\frac{dN}{ds} = -\frac{v}{\tau}, \quad q = 0, \quad r = \frac{v}{\rho},\right.$$

$$\Omega = v\left(\frac{B}{\rho} - \frac{T}{\tau}\right).$$

L'asse di moto elicoidale è tale che

$$\dot{O} + |\Omega(P - O) = k\Omega;$$

esso taglia ortogonalmente N ad una distanza da O

$$\frac{1}{\rho} : \left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{\tau^2}\right) < \rho.$$

6. Esprimere le p, q, r in funzione dei parametri di RODRIGUES e delle loro derivate.

Basta valersi delle (14) del § 6, Cap. 3°, le quali derivate rispetto al tempo dànno

$$\dot{a}_2 = 2\rho^2(\dot{\lambda}\mu + \lambda\dot{\mu} - \dot{\nu}) + \frac{2\dot{\rho}}{\rho}a_2; \text{ ecc.};$$

quindi per le formule del § 2 si deduce

$$p = 2\rho^2(\nu\dot{\mu} - \mu\dot{\nu} + \dot{\lambda}); \text{ ecc.}$$

[CAYLEY, The Cambridge a. Dublin Math. Journ. I (1846)].

7. Il vettore $\dot{\Omega}$ le cui proiezioni sugli assi connessi col sistema mobile sono $\dot{p}$, $\dot{q}$, $\dot{r}$ dicesi accelerazione angolare. Trovare le proiezioni sugli assi fissi.

Si ha

$$\dot{\Omega} = \dot{p}I + \dot{q}J + \dot{r}K = (\dot{p}a_1 + \dot{q}a_2 + \dot{r}a_3)I_1 + \ldots.$$

Ma

$$\dot{p} = a_1\dot{p}_1 + b_1\dot{q}_1 + c_1\dot{r}_1 + \dot{a}_1 p_1 + \ldots = a_1\dot{p}_1 + b_1\dot{q}_1 + c_1\dot{r}_1$$

per le (17'); onde

$$\dot{\Omega} = \dot{p}_1 I_1 + \dot{q}_1 J_1 + \dot{r}_1 K_1,$$

cioè le proiezioni richieste sono $\dot{p}_1$, $\dot{q}_1$, $\dot{r}_1$.

8. Col metodo delle proiezioni dedurre le analoghe delle (8) e delle (16) relative agli assi fissi.

Basterà moltiplicare le (8) [oppure le (16)] rispettivamente per a_1, a_2, a_3; ecc. e poi sommare, ed osservare che

$$q z - r y = a_1(q_1 z_1 - z_1 y_1)$$
$$+ a_2(r_1 x_1 - p_1 z_1) + a_3(p_1 y_1 - q_1 x_1);$$

e (Esercizio precedente)

$$\dot{q} z - \dot{r} y = a_1(\dot{q}_1 z_1 - \dot{r}_1 y_1) + \dots$$

ed infine che

$$a_1 \frac{\partial \Phi}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \Phi}{\partial y} + a_3 \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{\partial \Phi}{\partial x_1}; \text{ ecc.}$$

9. Dimostrare che l'accelerazione di strascinamento è la risultante di quella dell'origine degli assi; di una seconda eguale a $|\dot{\Omega}(P - O)$, e finalmente di una terza eguale a $\omega^2(M - P)$, M essendo il piede della normale condotta da P su Ω.

Nella (7′) si ponga

$$|\Omega(P - O) = |\Omega(P - M) = S - P$$

e quindi

$$|\Omega(S - P) = \omega^2(M - P);$$

derivando si ha

$$\ddot{P}_s = \ddot{O} + |\dot{\Omega}(P - O) + |\Omega(\dot{P}_s - \dot{O}),$$

cioè

$$\ddot{P}_s = \ddot{O} + |\dot{\Omega}(P - O) + |\Omega(S - P);$$

dunque è vero, ecc.

10. Trovare le formule ricorrenti per le accelerazioni di grado superiore.

Si applichi lo stesso metodo seguito per ottenere la (14); si consideri cioè l'odografo dell'accelerazione.

$$Q = O_1 + \ddot{P}_a,$$

essendo O_1 un punto fisso, l'accelerazione di 2° ordine è

eguale alla velocità di Q; onde

$$\ddot{P}_a = \text{vel. rel. } \ddot{P}_a + \text{vel. rel. } O_1 + \dot{O} + |\Omega(Q - O);$$

ma O_1 essendo fisso, sarà

$$0 = \text{vel. rel. } O_1 + \dot{O} + |\Omega(O_1 - O);$$

quindi, sottraendo:

$$\ddot{P}_a = \text{vel. rel. } \ddot{P}_a + |\Omega \ddot{P}_a .$$

Così in generale:

$$P_a^{(k)} = \text{vel. rel. } P_a^{(k-1)} + |\Omega P_a^{(k-1)}.$$

[GILBERT, Journal de Mathém. (4), **4** (1888)].

CAPITOLO QUINTO.

MOTO CONTINUO DI UN SISTEMA RIGIDO.

Il teorema fondàmentale del § 5 del Cap. precedente ci ha dato una rappresentazione semplice e chiara del moto istantaneo di un sistema rigido. Ora dovremmo cercare di ottenere una rappresentazione pure semplice del moto continuo di un sistema rigido; perciò cominceremo a considerare, come nel § 4 del Cap. 2°, due casi particolari, i quali, oltre a facilitare la risoluzione del caso generale, sono interessanti per sè stessi, sotto varii punti di vista. Il primo caso è il seguente.

§ 1. **Moto continuo di una figura piana nel proprio piano. Centro istantaneo di rotazione. Le due curve** Γ e Γ'.—Nel moto continuo di un corpo rigido, un piano scorra su sè stesso; ogni punto del corpo si muoverà su di una curva contenuta in un piano parallelo al primo; i punti situati su di una stessa normale al piano descriveranno curve

eguali, ecc. Dunque basterà limitarci allo studio del moto continuo di una figura piana nel proprio piano.

Siano P ed O due punti della figura mobile; dalla (7') del Cap. precedente, cioè

$$\dot{P} = \dot{O} + |\Omega(P - O),$$

riflettendo che $\dot{P}$ ed $\dot{O}$ giacciono sul piano della figura, risulta che Ω è normale al piano; quindi

$$|\Omega(P - O) = \omega(P - O)i,$$

in cui, come sappiamo, $(P - O)i$ rappresenta il vettore $P - O$ ruotato di $90°$; e però

$$\dot{P} = \dot{O} + \omega(P - O)i.$$

Sia C quell'unico punto la cui velocità di strascinamento, all'istante t, è nulla; esso resta pienamente definito dalla

$$0 = \dot{O} + \omega(C - O)i,$$

e dicesi *centro istantaneo di rotazione* *. Si deduce

$$\dot{P} = \omega(P - C)i; \tag{1}$$

la velocità di un punto qualunque della figura mobile è normale alla congiungente il punto col centro istantaneo, ed il suo modulo è il prodotto della distanza per la velocità angolare.

Dunque, per rispetto alla velocità:

Il moto istantaneo di una figura piana nel proprio piano equivale ad una rotazione istantanea intorno al centro istantaneo di rotazione.

---

* GIOV. BERNOULLI, *De centro spontaneo rotationis*, Opera 4 (1742), p. 265.

La $P - C$, normale alla velocità di P, è la normale alla traiettoria di P; cioè:

Le normali alle traiettorie dei punti della figura mobile, in un determinato istante, concorrono nel centro istantaneo.

Sia σ una curva connessa col piano mobile; nel moto della figura, σ invilupperà un'altra curva σ_1; sia P uno dei punti di contatto di σ con σ_1, all'istante t. Un osservatore connesso colla figura mobile, vedrà spostarsi P su σ; cioè la velocità relativa di P è diretta secondo la tangente a σ; mentre la assoluta è diretta secondo la tangente a σ_1; e però velocità assoluta e relativa hanno la stessa direzione, che è poi quella stessa della velocità di strascinamento, cioè normale a $P - C$; dunque:

I punti di contatto di una curva della figura mobile col proprio inviluppo sono i piedi delle normali condotte alla curva dal centro istantaneo *.

All'istante $t_1 > t$, P sia venuto in A su σ, in A_1 su σ_1; pongasi

$$s = \text{arco } AP; \quad s_1 = \text{arco } A_1 P.$$

Inoltre, per quanto si è detto,

* Questi teoremi sulle normali sono di CHASLES: vedi la memoria del 1829 già citata alla pag. 63.

$$v_a = v_r + v_s;$$

e poichè hanno stessa direzione, risulta

$$\frac{d(s_1 - s)}{dt} = \omega \operatorname{mod.}(P - C);$$

il primo membro dicesi *velocità di scivolamento* di σ su σ_1.

Se è sempre nulla, si dice che σ rotola senza strisciare su σ_1; in tal caso $s_1 - s$ deve essere costante e poichè all'istante t, tanto s che s_1 si annullano, la costante è nulla e quindi $s_1 = s$.

Immaginiamo ora sdoppiato il piano, composto cioè di due fogli sovrapposti, uno dei quali è tenuto fisso, mentre l'altro, sostegno della figura mobile, scorre sul primo. Consideriamo il luogo dei punti C sul piano fisso; avremo, in generale, una curva Γ, *luogo del centro istantaneo di rotazione sul piano fisso;* e sul piano mobile consideriamo il luogo dei punti che diventano successivamente centri istantanei di rotazione; tale luogo è una curva Γ' detta *luogo del centro istantaneo sul piano mobile.*

In ogni istante, cioè per ogni posizione della figura mobile, le due curve hanno un punto comune (centro istantaneo relativo a quel determinato istante). Questo punto ha nulla la velocità di strascinamento e però velocità relativa ed assoluta sono eguali; cioè le due curve si toccano e Γ può considerarsi come inviluppo di Γ'; inoltre la velocità di scivolamento è nulla; e quindi:

Nel moto continuo della figura piana la curva Γ' *rotola senza strisciare sulla curva* Γ *.

Di guisa che immaginando ritagliate due sagome curvilinee Γ e Γ', se si connette la figura mobile con Γ' e si fa rotolare senza strisciare Γ' su Γ, si riproduce, cinematicamente, il moto continuo della figura. Tale movimento dicesi *cicloidale*; ed otteniamo quindi la immagine più semplice del moto continuo suddetto dicendo:

Il moto continuo di una figura piana nel proprio piano è un moto cicloidale.

§ 2. **Centro delle accelerazioni; cerchio dei flessi.** — Facciamo ora alcune considerazioni sull'accelerazione di strascinamento. Derivando la (1) si ha successivamente

$$(2) \qquad \begin{cases} \ddot{P} = \dot{\omega}(P - C)i + \omega(\dot{P} - \dot{C})i \\ \ddot{P} = (\dot{\omega} i - \omega^2)(P - C) - \omega \dot{C} i. \end{cases}$$

Ponendo

$$(3) \qquad \dot{\omega} i - \omega^2 = \rho e^{i\varphi},$$

si ottiene

$$\ddot{P} = \rho e^{i\varphi}(P - C) - \omega \dot{C} i.$$

Determiniamo il punto la cui accelerazione di strascinamento è nulla, e sia O; avremo

$$(4) \qquad 0 = \rho e^{i\varphi}(O - C) - \omega \dot{C} i;$$

---

* Questo teorema trovasi nella Memoria di CAUCHY (1827), già citata a pag. 101; poi in quella di CHASLES (1829).

e quindi per sottrazione

(5) $$\ddot{P} = \rho e^{i\varphi}(P - O)$$

l'accelerazione di un punto qualunque è eguale al vettore $P - O$ ruotato di un angolo costante φ e poscia dilatato nel rapporto da 1 a ρ. Il punto O dicesi *centro delle accelerazioni*. (Fig. 7).

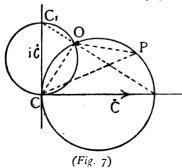
Dalla (4) risulta che l'angolo costante φ è uguale all'angolo che $O - C$ forma con $i\dot{C}$; appunto perchè $O - C$ ruotato di φ, coincide con $i\dot{C}$.

Se la velocità angolare è costante, cioè $\dot{\omega} = 0$, la (4) diventa

$$\omega(O - C) + i\dot{C} = 0;$$

il punto O, cade sulla $i\dot{C}$ ad una distanza da C eguale a $-V:\omega$, essendo $V = \text{mod.}\, \dot{C}$; lo indicheremo con C_1 e lo diremo *centro geometrico delle accelerazioni*. In tale ipotesi

$$\ddot{P} = \omega^2(C_1 - P);$$

(Fig. 7)

l'accelerazione dei varii punti è diretta verso C_1.

Tornando ora al caso generale, deduciamo alcune notevoli conseguenze. Se $\ddot{P}$ è costante, lo è (5) anche $P - O$; on-

de *i punti che all'istante t hanno accelerazione costante sono su cerchi aventi il centro nel centro delle accelerazioni.*

Se un punto P ha accelerazione diretta secondo la normale $P - C$ alla propria traiettoria, cioè se ha nulla l'accelerazione tangenziale, il vettore $P - O$, ruotato di φ, deve coincidere con $P - C$; dunque $OPC = \varphi$; *il luogo dei punti la cui accelerazione tangenziale è nulla stanno su di un cerchio passante per O, C e tangente alla $i\dot{C}$.* Allo stesso modo si vede che *il luogo dei punti la cui accelerazione normale è nulla sono di un altro cerchio passante per O, C e tangente alla $\dot{C}$.*

Il diametro di questo secondo cerchio è

$$\text{mod}\,(O - C) : \cos\varphi,$$

cioè, essendo per la (4) $\text{mod}(O - C) = \frac{\omega V}{\rho}$, e $\rho \cos\varphi = -\omega^2$ in virtù della (3), tale diametro è $-V : \omega$; quindi il cerchio passa pel punto C_1, centro geometrico delle accelerazioni. I punti di questo cerchio presentano (Cap. 2, § 3) un flesso per le loro traiettorie e però esso dicesi dei *flessi* *.

Il punto C però fa eccezione: la sua accele-

---

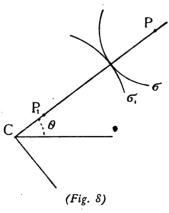
* DE LA HIRE, *Traité des Roulettes* [Mém. de l'Acad. Royale de Paris (1706), p. 348]. I due cerchi furon poi ritrovati da BRESSE [J. de l'Éc. Polytech. Cah. **35** (1853), p. 89].

razione, dalla (2), è $-\omega \dot{C} i$, e quindi ha per modulo ωV, ed è diretta secondo $-i\dot{C}$, cioè è normale; d'altra parte è nulla la sua velocità di strascinamento; quindi, per la nota formula $w_n = v^2 : \rho$, deve essere nullo ρ; cioè C presenta un regresso per la propria traiettoria.

E ciò si rende anche chiaro colla diretta considerazione del moto di rotolamento di Γ' su Γ.

Notiamo infine che se assumiamo C come origine, la $\dot{C}$ come asse delle x, al modo solito, la (1) e la (2) ci dànno per le componenti della velocità e accelerazione di strascinamento le

$$(6)\begin{cases} v_{sx} = -\omega y, & v_{sy} = \omega x \\ w_{sx} = -\omega^2 x - \dot{\omega} y, & w_{sy} = \dot{\omega} x - \omega^2 y - \omega V. \end{cases}$$

§ 3. **Formula di Euler-Savary. Costruzione dei centri di curvatura.** — Una curva σ (Fig. 8) connessa con Γ' inviluppa un'altra curva σ_1; uno dei punti di contatto giace sulla normale condotta da C su σ; siano P, P_1 i centri di curvatura di σ e σ_1 relativi a quel punto di contatto; r ed r_1 le loro rispettive distanze da C, contate po-

(Fig. 8)

sitive se P e P_1 cadono da una stessa parte di C; altrimenti negative.

La velocità angolare istantanea ω intorno C può decomporsi in due altre intorno ad assi paralleli e normali al piano e passanti per P e P_1. Detta ω_1 la velocità istantanea intorno P_1, si ha

$$\omega_1 : r = \omega : (r - r_1),$$

cioè

$$\omega = \omega_1 r_1 \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right);$$

ma $\omega_1 r_1$ è la velocità con cui C ruota intorno P_1 cioè $V \operatorname{sen} \theta$, onde:

$$\frac{\omega}{V} = \operatorname{sen} \theta \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right). \tag{7}$$

Il primo rapporto non dipende dalla speciale curva σ che si considera.

Assumiamo, in particolare, per curva σ la Γ' e quindi Γ per σ_1. Sarà $\theta = 90°$ e se diciamo R il raggio di curvatura di Γ in C, e R' quello di Γ' (essendo $R' \gtrless 0$ secondo che Γ e Γ' hanno stessa concavità o concavità opposte) sarà

$$\frac{\omega}{V} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}; \tag{8}$$

la quale sarebbe del resto suscettibile di una dimostrazione diretta.

Abbiamo dunque

$$(9) \qquad \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'} \; *.$$

Se in particolare σ si riduce ad un punto P, allora P_1 è il centro di curvatura della traiettoria descritta da P; quindi *il centro di curvatura dell'inviluppo di una curva, coincide con quello della traiettoria descritta dal centro di curvatura della inviluppante.*

Sia M (Fig. 9) il punto in cui la retta PC taglia il cerchio dei flessi; ρ il raggio di curvatura della traiettoria descritta da P; sarà

$$CM = -\frac{V}{\omega}\operatorname{sen}\theta, \quad \rho = r - r_1;$$

quindi la (7) si riduce alla

$$MC = \frac{r^2}{\rho} - r,$$

donde

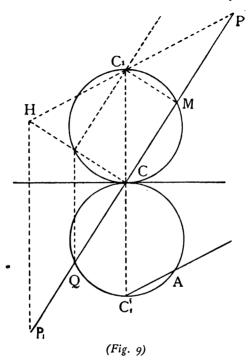
$$(10) \qquad \frac{r^2}{\rho} = MP.$$

Allorchè è noto il cerchio dei flessi, la (10) permette di costruire di ogni punto il corrispon-

---

* La formula fondamentale (9) ridotta alle notazioni moderne è di EULER, *Supplementum de figura dentium rotarum.* [Novi Comm. Acad. Petrop., **11** (1765), p. 219, § 17]. Fu ritrovata da SAVARY ed esposta nelle sue lezioni sugli Ingranaggi, nel corso di macchine alla Scuola Politecnica di Parigi, come risulta da una comunicazione di CHASLES [J. de Mathém. **10** (1845), p. 204].

dente centro di curvatura. Si conduca PC_1, PC;

(Fig. 9)

CH normale a PC e da H la parallela a CC_1 che taglia PC nel centro di curvatura P_1.

Infatti C_1M ed HC essendo parallele si ha

$$PC : PM = PH : PC_1 = PP_1 : PC,$$

donde

$$PP_1 = r^2 : MP$$

e quindi per la (10)

$$\rho = PP_1 .$$

Si deduce subito che la traiettoria di P volge la sua concavità o convessità verso C secondo che P è esterno o interno al cerchio dei flessi.

Il centro di curvatura dell'inviluppo di una retta della figura mobile si otterrà applicando la costruzione precedente al centro di curvatura della retta stessa, supponendo cioè P all'infinito; se Q è uno di questi centri, risulta $CQ = CM$; col variar della retta, Q descrive un cerchio simmetrico al cerchio dei flessi e che dicesi dei *regressi; tutte le rette della figura mobile inviluppano curve i cui centri di curvatura sono sul cerchio dei regressi.*

Una retta passante per C_1' tocca il proprio inviluppo in A (piede della normale condotta da C) che coincide col centro di curvatura dell'inviluppo stesso; cioè A è un regresso per l'inviluppo; di qui il nome di cerchio dei regressi.

Se una retta passa per un punto fisso, esso è l'inviluppo della retta e però tal punto deve trovarsi sul cerchio dei regressi.

Allorchè sono noti i centri di curvatura K e K' di Γ e Γ' relativi a C, la (9) conduce ad una seconda costruzione del centro di curvatura. Assumo (Fig. 10) come asse x la normale PC e per asse y una perpendicolare a questa. La PK', che taglia su y un segmento u, ha per equazione

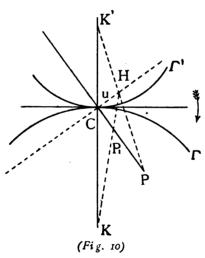
$$\frac{x}{r} + \frac{y}{u} = 1$$

ed essendo soddisfatta dalle coordinate di K' $(R' \operatorname{sen} \theta, R' \cos \theta)$, sarà

$$\frac{1}{r} + \frac{1}{u} \operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{R' \operatorname{sen} \theta};$$

parimenti, congiungendo P_1 con K e detta u_1 la parte intercetta su y, si avrà

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{u_1} \operatorname{cotg} \theta = \frac{1}{R \operatorname{sen} \theta};$$

(Fig. 10)

sottraendo e tenendo presente la (9) risulta $u = u_1$; PK' e P_1K si incontrano in uno stesso punto di y: dunque:

Si tiri la PK' e se ne determini la intersezione H colla normale in C alla CP; la HK taglia PC nel centro di curvatura P_1.

Questa è la costruzione di SAVARY.

Se $\theta = 90°$ la costruzione precedente cade in

difetto; ma avendosi

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R'}$$

è facile, costruendo quarte proporzionali, trovare r_1.

Inoltre si è tacitamente escluso il caso di $\theta = 0$; il secondo membro della (9), in tale ipotesi, essendo diverso da zero, come r, dovrà essere $r_1 = 0$; cioè *i punti della tangente comune a* Γ *e* Γ′ *descrivono traiettorie col centro di curvatura in C.*

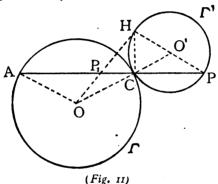
§ 4. **Alcune applicazioni dei risultati precedenti.**

a) Supponiamo date anzitutto le due curve Γ e Γ′ e precisamente Γ sia una retta e Γ′ un cerchio (moto puro cicloidale). Ogni punto della figura mobile descrive una cicloide allungata, accorciata od ordinaria secondo che è esterno, interno o sopra Γ′ (Fig. 1); C è il centro istantaneo e quindi la PC (qualunque sia la posizione di P) è la normale alla traiettoria. Se P è su Γ′, la congiungente P col punto diametralmente opposto a C, è la tangente alla cicloide. Conoscendosi inoltre il centro di curvatura di Γ e Γ′, per costruire il raggio di curvatura corrispondente a P, si tiri PO' fino ad incontrare in H la normale in C alla PC e da H la parallela alla $O'C$ che taglia in Q (centro di curvatura) la PC. Il punto O' descrivendo una retta è sempre un flesso per la sua traiettoria; il cerchio descritto su CO' come diametro è il cer-

chio dei flessi e O' è il centro geometrico delle accelerazioni; quindi potrebbe anche applicarsi, per la ricerca di Q, la prima costruzione.

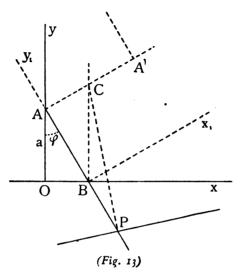
Se supponiamo fisso il cerchio, mobile la retta (moto inverso) ogni punto di questa descrive una sviluppante di cerchio.

In modo identico si può trattare il caso in cui Γ e Γ' sono due circonferenze (Fig. 11) (moto *epi* o *ipocicloidale*). Se P trovasi su Γ', notando che

(*Fig. 11*)

O_1A è parallela ad $O'P$, si vede che il gruppo PP_1CA è armonico; quindi il centro di curvatura di P è la intersezione di PC colla polare di P rispetto a Γ.

b) Supponiamo ora date le traiettorie di due punti della figura mobile; e precisamente (Fig. 12) due punti A e B descrivano due rette ortogonali OA, OB. Le normali in A e B alle due rette s'in-

passa per B e per C; quello dei regressi passa per A e per C; ma i due cerchi essendo simmetrici

(*Fig. 13*)

rispetto a C, quello dei flessi passerà anche per il simmetrico A' di A, rispetto a C; quindi è determinato. L'intersezione di OB colla normale in A' alla AC è il centro geometrico delle accelerazioni. Un punto qualunque P di AB descrive la concoide della retta rispetto al polo A; la PC è la normale alla concoide, di cui, conoscendosi il cerchio dei flessi, colla prima costruzione, si determina ancora il centro di curvatura.

Possiamo ancora determinare le due curve Γ

e Γ′; riferiamo C agli assi fissi x, y; avremo $x = OB = a \tang\varphi$, $y = CB = AB : \cos\varphi = a : \cos^2\varphi$; eliminando φ, otteniamo l'equazione della curva Γ,

$$x^2 = a(y - a);$$

parabola il cui vertice è A e AO è l'asse. Riferendo invece la posizione di C ad una coppia d'assi mobili x_1, y_1, si ha

$$x_1 = CA = CB \tang\varphi = a \operatorname{sen}\varphi : \cos^2\varphi$$
$$y_1 = AB = a : \cos^2\varphi$$

ed eliminando φ,

$$y_1^4 = a^2 (x_1^2 + y_1^2),$$

che è l'equazione di Γ′.

§ 5. **Moto continuo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso.** — È il secondo dei casi particolari che vogliamo considerare e si riduce anche al moto continuo di una figura sferica sulla propria sfera. Se O è il punto fisso, la velocità di un punto P è espressa da

$$\dot{P} = |\Omega(P - O)$$

[Cap. 4°, § 2, form. (7′)]; quindi *il moto istantaneo equivale ad una rotazione istantanea intorno ad un asse uscente dal punto fisso (asse istantaneo di rotazione)* *.

---

* Fu scoperto da d'ALEMBERT, *Recherches sur la préces. d. équinoxes.* Paris 1749, p. 83; poi da EULER, pag. 202 nella mem. citata a pag. 91; e quindi prima del teorema analogo per le posizioni finite. Vedi nota a pag. 101.

La velocità essendo inoltre diretta normalmente al piano determinato dal punto e dall'asse, risulta che:

I piani normali alle traiettorie dei varii punti del sistema, in un determinato istante, passano per l'asse istantaneo di rotazione.

Sia C l'estremo del vettore Ω (applicato in O); lo diremo *polo di rotazione*. Le sue varie posizioni nello spazio costituiscono una curva che dicesi *erpoloide*; il cono Γ che la proietta da O dicesi cono della erpoloide, od anche *cono degli assi istantanei di rotazione nello spazio fisso*. Consideriamo poi quei punti del corpo che diventano successivamente poli di rotazione; essi costituiscono nel corpo (che potremo dire spazio mobile) un'altra curva che dicesi *poloide*; il cono Γ', che la proietta da O, dicesi cono della poloide, od anche *cono degli assi istantanei di rotazione nello spazio mobile.*

I due coni hanno in ogni istante una generatrice comune, l'asse di rotazione istantaneo relativo; i punti di questo avendo nulla la velocità di strascinamento, hanno eguale la velocità assoluta e relativa; però i due coni hanno il piano tangente comune lungo quella generatrice. Di qui, come al § 1, si può concludere che:

Il moto continuo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso equivale al rotolamento, senza striscia-

mento, di un cono connesso col corpo su di un cono fisso *.

Questi risultati dànno luogo ad altri relativi al moto di una figura sferica sulla propria sfera, per il quale potrebbe svilupparsi una teoria analoga a quella sviluppata nei precedenti §.

Così se r ed r_1 sono gli archi sferici, contati da C, dei centri di curvatura sferica di una curva σ e del proprio inviluppo σ_1, applicando le stesse considerazioni del § 3, si trova

$$\frac{\omega}{V} = \operatorname{sen}\theta \frac{\operatorname{sen}(r - r_1)}{\operatorname{sen} r \operatorname{sen} r_1} = \operatorname{sen}\theta(\operatorname{cotg} r_1 - \operatorname{cotg} r),$$

e quindi se diciamo R ed R' i raggi di curvatura sferica in C delle due curve Γ e Γ', si avrà, come per la (9),

$$(10)\quad \operatorname{sen}\theta\left(\frac{1}{\operatorname{tg} r_1} - \frac{1}{\operatorname{tg} r}\right) = \frac{1}{\operatorname{tg} R} - \frac{1}{\operatorname{tg} R'},$$

che è la formula di EULER-SAVARY per la sfera, e dalla quale si deduce che proiettando dal centro della sfera sul piano tangente in C alla sfera abbiamo un moto piano in cui i centri di curvatura

---

* Questo teorema dato pure da CAUCHY nella memoria più volte citata (1827) e poi da CHASLES pel moto su di una sfera (1829), fu posto in maggior luce da POINSOT, *Théorie nouvelle de la rotation des corps,* Paris 1834 [J. de Mathém. **16** (1851), p. 26], a cui è dovuta la considerazione della poloide ed erpoloide (Cap. II, § 5 ; l. c.).

sono i corrispondenti di quelli di curvatura sferica, ecc. *.

§ 6. **Poloide ed erpoloide.** — Diciamo *diretto* il moto del corpo rispetto allo spazio circostante; *inverso* il moto dello spazio rispetto al corpo. In questi due moti le velocità angolari sono eguali e di senso contrario e però *i poli di rotazione relativi al moto diretto ed inverso sono simmetrici rispetto al punto fisso.*

Siano C e C_1 questi due poli; quando C descrive la poloide nel moto diretto, cioè nel moto del corpo rispetto allo spazio circostante, C_1 descrive la curva, supposto fisso il corpo, nello spazio; cioè la erpoloide nel moto inverso; onde

La poloide ed erpoloide del moto diretto sono rispettivamente simmetriche, rispetto al punto fisso, della erpoloide e poloide del moto inverso **.

Riferiamo la posizione del corpo ad una terna d'assi connessi col corpo e colla origine in O; la posizione di questa terna rispetto ad un'altra fissa, sia definita dai quattro parametri α, β, γ, δ, funzioni del tempo. (Cap. 3°, § 6). Nella posizione corrispondente all'istante $t+\tau$ siano α', β', γ', δ' i relativi parametri e 2φ l'ampiezza della rotazione

---

* I metodi seguiti sono di ARONHOLD ed esposti da BUKA, *Das sphärische Kurbelgetriebe.* Inaug. Diss. Göttingen, 1876.

** KLEIN u. SOMMERFELD, l. c., pag. 14.

con cui dalla posizione all'istante t si passa a quella a $t+\tau$. Dalle (20) dello stesso § si ha

$$\alpha' = \cos\varphi + i c' \operatorname{sen}\varphi, \quad \beta' = \operatorname{sen}\varphi(-b' + i a'),$$

essendo a', b', c' i coseni dell'asse di rotazione. La risultante della rotazione α, β, γ, δ e di quella α', β', γ', δ', abbia per parametri $\alpha + \Delta\alpha, \ldots$. Per le (21) avremo

$$\alpha + \Delta\alpha = \alpha\alpha' + \beta\gamma', \quad \beta + \Delta\beta = \alpha\beta' + \beta\delta';$$

onde

$$\Delta\alpha = -\alpha(1-\cos\varphi) + i\alpha c' \operatorname{sen}\varphi + \beta \operatorname{sen}\varphi(b' + ia')$$
$$\Delta\beta = -\beta(1-\cos\varphi) - i\beta c' \operatorname{sen}\varphi + \alpha \operatorname{sen}\varphi(-b' + ia').$$

Dividiamo ora per τ e passiamo al limite per $\tau = 0$; 2φ tende a zero; ma

$$\lim \frac{2\varphi}{\tau} = \omega$$

velocità angolare istantanea di rotazione, il cui asse abbia per coseni a, b, c. Notando che

$$\lim \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\tau} = \lim \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\varphi} \cdot \frac{\varphi}{\tau} = \frac{1}{2}\omega$$

e che $a\omega$, $b\omega$, $c\omega$ sono le componenti p, q, r della velocità istantanea, secondo gli assi, deduciamo:

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot\alpha = \frac{1}{2} i r \alpha + \frac{1}{2}(ip+q)\beta \\ \dot\beta = \frac{1}{2}(ip-q)\alpha - \frac{1}{2} i r \beta; \end{array} \right.$$

cambiando i in $-i$, α si muta in δ, β in $-\gamma$; onde senza altri calcoli otterremo:

$$(11') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dot\gamma = \frac{1}{2} i r \gamma + \frac{1}{2}(ip+q)\delta \\ \dot\delta = \frac{1}{2}(ip-q)\gamma - \frac{1}{2} i r \delta. \end{array} \right.$$

Di qui inversamente possiamo ricavare p, q, r, cioè le coordinate di un punto della poloide. Troviamo

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} p + iq &= 2i(\beta\dot{\delta} - \dot{\beta}\delta) \\ -p + iq &= 2i(\alpha\dot{\gamma} - \dot{\alpha}\gamma) \\ r = 2i(\gamma\dot{\beta} - \alpha\dot{\delta}) &= 2i(\delta\dot{\alpha} - \beta\dot{\gamma}). \end{aligned}\right.$$

Le componenti del vettore $\mathbf{\Omega}$ secondo gli assi fissi daranno le coordinate di un punto della erpoloide: diciamole p_1, q_1, r_1 e le possiamo ricavare semplicemente così. I parametri del moto inverso sono: δ, $-\beta$, $-\gamma$, α; la poloide del moto inverso è simmetrica alla erpoloide del moto diretto, rispetto al punto fisso; dunque applicando le (12) avremo:

$$-p_1 - iq_1 = 2i(-\beta\dot{\alpha} + \dot{\beta}\alpha)\text{; ecc.}$$

onde

$$(13)\quad \left\{\begin{aligned} p_1 + iq_1 &= 2i(\beta\dot{\alpha} - \dot{\beta}\alpha) \\ -p_1 + iq_1 &= 2i(\delta\dot{\gamma} - \dot{\delta}\gamma) \\ r_1 &= 2i(\gamma\dot{\beta} - \delta\dot{\alpha}). \end{aligned}\right.$$

Conoscendo quindi in funzione del tempo i parametri α, β, γ, δ, conosceremo la posizione del corpo, l'asse di rotazione, la velocità istantanea e, con semplici derivazioni otterremo la rappresentazione parametrica della poloide ed erpoloide *.

Valendoci finalmente delle formule (9) dello

* KLEIN u. SOMMERFELD, l. c., p. 43, e seg.

stesso paragrafo, con un calcolo assai semplice otteniamo

$$
\begin{aligned}
p + iq &= (\dot\vartheta + i\dot\psi \operatorname{sen}\vartheta)\, e^{-i\varphi} \\
-p + iq &= (-\dot\vartheta + i\dot\psi \operatorname{sen}\vartheta)\, e^{i\varphi} \\
r &= \dot\varphi + \dot\psi \operatorname{sen}\vartheta,
\end{aligned}
$$

cioè:

$$
(14)\qquad \left\{
\begin{aligned}
p &= \dot\vartheta \cos\varphi + \dot\psi \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi \\
q &= -\dot\vartheta \operatorname{sen}\varphi + \dot\psi \operatorname{sen}\vartheta \cos\varphi \\
r &= \dot\varphi + \dot\psi \operatorname{sen}\vartheta.
\end{aligned}
\right.
$$

Volendo ottenere formule analoghe pel moto inverso muteremo p, q, r in $-p_1$, $-q_1$, $-r_1$, e ψ, ϑ, φ in $-\varphi$, $-\vartheta$, $-\psi$; quindi

$$
(15)\qquad \left\{
\begin{aligned}
p_1 &= \dot\vartheta \cos\psi + \dot\varphi \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\psi \\
q_1 &= \dot\vartheta \operatorname{sen}\psi - \dot\varphi \operatorname{sen}\vartheta \cos\psi \\
r_1 &= \dot\psi + \dot\varphi \operatorname{sen}\vartheta.
\end{aligned}
\right.
$$

Le (14) e (15) dànno la rappresentazione della poloide ed erpoloide per mezzo degli angoli di EULER.

§ 7. **Moto continuo di un sistema rigido.**—È questo il caso generale, intorno al quale ci limiteremo ad osservare un solo e notevole risultato.

Il moto istantaneo di un sistema rigido equivale ad un moto istantaneo elicoidale. I successivi assi di moto elicoidale, corrispondenti alle successive posizioni del corpo, costituiscono una superficie rigata Γ; e così quelle rette del corpo che successivamente diventano assi di moto elicoidale costituiscono un'altra superficie rigata Γ'. Queste

due superficie, nei due casi particolari precedentemente considerati si riducono a due cilindri o a due coni. In ogni istante esse hanno a comune una generatrice, asse di moto elicoidale relativo. Lungo i punti di questa generatrice le due superficie hanno a comune tutti i piani tangenti. Infatti sia P un punto di questa generatrice; si ha che $\dot{P}_a$, $\dot{P}_r$ e $\dot{P}_s$ giacciono in uno stesso piano, il quale contiene la generatrice, perchè appunto $\dot{P}_s$ è diretta secondo l'asse di moto elicoidale; ma il piano dell'asse e di $\dot{P}_a$ è il piano tangente in P a Γ; quello dell'asse e di $\dot{P}_r$ è tangente in P a Γ'; dunque è vero ecc. *Il moto continuo del sistema rigido potrà quindi riprodursi immaginando che una superficie rigata connessa col sistema si muova su di una rigata fissa a cui è tangente secondo una generatrice e sulla quale essa rotola scivolando lungo la generatrice* *.

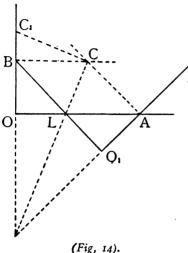
Esercizi.

1. Un angolo retto EO_1B si muove in modo che il punto B percorre una retta mentre il lato O_1E passa per un punto fisso A tale che $OA = O_1B$.

---

* L'esistenza di queste due rigate risulta già nella memoria di Cauchy più volte citata. Il teorema poi fu esplicitamente enunciato da Poncelet nel suo corso alla Faculté des Sciences de Paris, 1838.

Trovare le due curve Γ e Γ'.

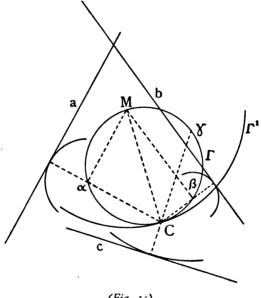
Il centro istantaneo è nel punto d'incontro della normale AC ad O_1E e BC alla OB; risulta $CB = CA$, onde Γ è una parabola col fuoco in A e direttrice OB; Γ' è una parabola eguale col fuoco in B e direttrice O_1E, simmetrica alla prima rispetto la tangente comune CL.

(Fig, 14).

Il cerchio dei flessi passa per C e B ed è tangente in C alla CL; condotta CC_1 normale a CL, C_1 è il centro geometrico delle accelerazioni, ecc. Il luogo di O_1 è una strofoide retta di cui possiamo trovare normale, raggio di curvatura, ecc. (LORIA, l. c., p. 58).

2. Nel moto di una figura piana due rette a, b inviluppano due cerchi di centri α e β. Trovare le due curve Γ e Γ' e l'inviluppo di ogni altra retta c.

Il centro istantaneo C è nel punto d'incontro delle normali condotte da α e β su a e b.

Conducendo da α e β le parallele ad a e b formeremo un quadrilatero inscrittibile; il luogo di C, essendo $\alpha C\beta = ab$, è il cerchio circoscritto. $CM =$ cost.; onde Γ' è un cerchio

di raggio doppio di Γ (moto inverso di uno considerato al § 4). La $C\gamma$ è la normale all'inviluppo di C; γ essendo un

(Fig. 15).

punto fisso l'inviluppo è un cerchio, cioè tutte le rette inviluppano cerchi i cui centri sono su di un altro cerchio. (Teorema di BOBILLIER). Il cerchio $\alpha C \beta$ è il cerchio dei regressi e però resta determinato quello dei flessi, ecc.

3. Due punti A e B si muovono sopra due cerchi eguali O, O_1 ed è $OO_1 = AB$. Trovare le due curve Γ e Γ' e dimostrare che se O ed O_1 si tagliano ad angolo retto il punto di mezzo M

di AB descrive una lemniscata i cui fuochi sono O ed O_1.

Il punto d'incontro di OA e $O_1 B$ è il centro istantaneo, e poichè $CO_1 - CO = r$, $CA - CB = r$, Γ è una iperbole di fuochi O ed O_1 e Γ' una iperbole eguale ma di fuochi A e B. La tangente comune è la bisettrice dell'angolo in C; poichè della traiettoria di A conosciamo il centro di curvatura, si può determinare l'intersezione di OA col cerchio dei flessi, che resta quindi determinato. Se i due cerchi si tagliano ad angolo retto $OO_1 = AB = r\sqrt{2}$, Γ e Γ' sono iperboli equilatere. Se Q è il punto medio di OO_1, ρ e θ le coordinate polari di M, si trova

$$\overline{AO}_1^2 + r^2 - 2r\sqrt{2}\,AO_1 \cos\theta = 0;$$

lo stesso per OB; quindi

$$\rho = \frac{1}{2}(AO_1 - OB) = r\sqrt{\cos 2\theta}; \text{ ecc.}$$

4. Stesso problema supponendo A mobile su di un cerchio di centro O e B su di una retta passante per O.

Posto $OA = r$, $AB = a$ e scelto O per polo, OB per asse polare l'equazione di Γ è

$$\rho(\rho - 2r)\cos^2\theta = a^2 - r^2.$$

Scelto invece A per polo, AB per asse polare, quella di Γ' è

$$a^2(\rho_1 - 2r)\,\text{sen}^2\theta_1 = (a^2 - r^2)(\rho_1^2 - a^2).$$

Entrambe sono curve del 6° ordine.

5. Il vertice di un angolo costante descrive una spirale logaritmica, mentre un suo lato passa pel polo O della spirale. L'inviluppo dell'altro lato (sviluppoide della spirale) è una spirale collo stesso polo.

Il centro istantaneo C è nella intersezione della normale in P alla spirale colla perpendicolare condotta da O alla OP; tirando da C la normale sull'altro lato dell'angolo, il piede N è il punto di contatto coll'inviluppo; ma ON forma con NP un angolo costante; dunque, ecc.

Come caso particolare si deduce che l'evoluta è una spirale; supposto O centro luminoso e la spirale come sup. riflettente o rifrangente, l'inviluppo dei raggi riflessi o rifratti è pure una spirale.

6. Dimostrare che il vertice V di un angolo costante i cui lati sono tangenti ad una spirale logaritmica, descrive una spirale collo stesso polo (curva isoptica).

Si dimostra che la OV forma un angolo costante colla normale in V alla traiettoria.

7. Dimostrare che se una spirale logaritmica ruota su di una retta, il suo polo descrive una retta.

La curva descritta ha infatti le tangenti egualmente inclinate sulla retta.

8. Condurre la tangente alla podaria di una curva rispetto ad un punto O.

La podaria è la curva descritta dal vertice V di un angolo retto di cui un lato passa per O, l'altro è tangente alla curva e se P ne è il punto di contatto, il centro istantaneo si determina subito; la normale in V è la congiungente V col punto medio di OP.

9. Dimostrare che la punteggiata dei punti P di una retta uscente da C e quella dei centri di curvatura P_1 sono proiettive.

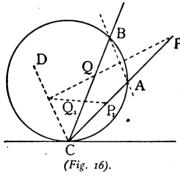
Se a è il segmento intercetto sul cerchio dei regressi da

PC, colle stesse notazioni del § 3 si ha

$$r_1 = \frac{ar}{a+r};$$

i punti uniti coincidono con C; il punto limite di P o di P_1 è l'incontro di PC col cerchio dei flessi o dei regressi.

10. Dato il centro istantaneo, la tangente comune alle due curve Γ, Γ' e di un punto P il corrispondente P_1, trovare di ogni altro punto Q il relativo centro di curvatura.

È un teorema noto di geometria che le congiungenti PQ, $P_1 Q_1$ si incontrano in punti di una retta CD parallela alla congiungente i punti limiti A e B.

(*Fig. 16*).

Quindi $DCB = CBA = ACt$; e siccome quest'ultimo è noto, così sarà determinata la CD e quindi Q_1. La costruzione di SAVARY è un caso particolare di questa, perchè a K' corrisponde K. (BOBILLIER).

11. Dati due punti P, Q ed i loro corrispondenti, di ogni altro punto trovare il corrispondente.

L'intersezione di PP_1, QQ_1 è il centro istantaneo; la CD è determinata e quindi t; ecc.

12. Trovare le coordinate di P_1 in funzione di quelle di P rispetto agli assi del § 2 e reciprocamente.

Partendo dalla formula (7)

$$r_1 = \frac{V}{\omega} r \operatorname{sen}\theta \left(\frac{V}{\omega} \operatorname{sen}\theta + r \right)^{-1}$$

e proiettando su x ed y risulta

$$x_1 = \frac{V}{\omega} x y \left(x^2 + y^2 + \frac{V}{\omega} y \right)^{-1}$$

$$y_1 = \frac{V}{\omega} y^2 \left(x^2 + y^2 + \frac{V}{\omega} y \right)^{-1};$$

reciprocamente, dalla espressione di r mediante r_1, oppure dalle precedenti ed osservando che

$$x : y = x_1 : y_1 ,$$

$$x = -\frac{V}{\omega} x_1 y_1 \left(x_1^2 + y_1^2 - \frac{V}{\omega} y_1 \right)^{-1}$$

$$y = -\frac{V}{\omega} y_1^2 \left(x_1^2 + y_1^2 - \frac{V}{\omega} y_1 \right)^{-1}$$

esse definiscono una notissima trasformazione quadratica.

Dimostrare che se P (ovvero P_1) descrive una retta, P_1 (ovvero P) descriverà una conica che ha in C per cerchio osculatore il cerchio dei regressi (ovvero dei flessi).

Se le coordinate di P soddisfano una equazione lineare, quelle di P_1 soddisfano ad una di secondo grado e reciprocamente. Con note formule si trova il raggio di curvatura di una qualunque conica in C e si trova precisamente il cerchio dei regressi (flessi). Se la retta descritta da P taglia il cerchio dei flessi, la conica corrispondente è un'iperbole, ecc.

Si può anche ragionare così. Le coniche corrispondenti alle rette descritte da P sono tangenti in C alle Γ e Γ'; siano α e β quelle corrispondenti ad a e b tagliantisi in P; α e β si toccano in C e passano per P_1; hanno un altro punto comune reale a cui non può corrispondere un altro punto di a e b; esso dunque cade in C e precisamente corrisponde

ai punti d'incontro di a e b con la tangente t; dunque tutte le coniche hanno in C un contatto tripunto; ma alla retta all'infinito corrisponde il cerchio dei regressi; ecc.

A rette uscenti da un punto di t corrispondono coniche aventi in C un quadripunto.

14. Nel moto istantaneo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso, come si modificano le (8) e (16) del Cap. 4°, nella ipotesi che l'asse z sia l'asse di rotazione ed il piano zx sia tangente ai due coni Γ e Γ'? Trovare i punti la cui accelerazione è nulla.

Per l'istante considerato deve essere

$$p = q = \dot{q} = 0, \quad r = \omega$$

onde:

$$v_{sx} = -\omega y, \qquad v_{sy} = \omega x, \qquad v_{sz} = 0$$

$$w_{sx} = -\omega^2 x - \dot{\omega} y, \; w_{sy} = \dot{\omega} x - \omega^2 y - \dot{p} z, \; w_{sz} = \dot{p} y.$$

Il punto fisso ha, in generale, accelerazione nulla.

Se $\dot{p} = 0$, l'asse di rotazione, che coincide con quello di accelerazione (eserc. 7, Cap. 4°), ha accelerazione nulla. Si considerano facilmente i casi di $\dot{\omega} = 0$, oppure $\omega = 0$.

15. Nell'ipotesi dell'esercizio precedente trovare il luogo dei punti che hanno, in un dato istante, accelerazione tangenziale o normale nulla, o costante l'accelerazione totale.

Se l'accelerazione tangenziale è nulla $\dot{P}|\ddot{P} = 0$; onde

$$\dot{\omega}(x^2 + y^2) - \dot{p} x z = 0$$

equazione di un cono di cui sono due generatrici l'asse di rotazione e di accelerazione e che può essere generato da due piani ortogonali passanti per queste due rette.

I punti la cui accelerazione normale è nulla, cioè $\ddot{P} = k\dot{P}$ si riducono al punto fisso, oppure all'asse z se $\dot{p} = 0$.

I punti che hanno accelerazione totale costante sono sull'ellissoide

$$(\omega^2 x + \dot{\omega} y)^2 + (\dot{\omega} x - \omega^2 y - \dot{p} z)^2 + \dot{p}^2 y^2 = K^2 .$$

Posto

$$\omega^2 x + \dot{\omega} y = \frac{x'}{a'} ; \text{ ecc. e per } K = 1 \text{ si ha}$$

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1$$

e inoltre

$$w_{sx} = -\frac{x'}{a'}, \quad w_{sy} = -\frac{y'}{b'}, \quad w_{sz} = -\frac{z'}{c'} .$$

16. Dimostrare che l'accelerazione tangenziale è eguale al prodotto del raggio vettore OP per la proiezione dell'accelerazione angolare sulla normale in P al cono descritto da OP.

Si ha (esercizio 9, Cap. 4°)

$$\ddot{P} = |\dot{\Omega}(P - O) + \omega^2(M - P) ;$$

ma

$$|\ddot{P} + \omega^2|(P - M) = \dot{\Omega}(P - O)$$

$$\dot{P}|\ddot{P} = \dot{P}\dot{\Omega}(P - O),$$

quindi

$$\dot{P}|\ddot{P} : \text{mod } \dot{P} = \text{mod } [(P - O)\dot{\Omega}_n],$$

dove $\dot{\Omega}_n$ è la proiezione di $\dot{\Omega}$ sulla normale al piano $\dot{P}$, $P-O$; ma il primo membro è appunto il valore dell'accelerazione tangenziale.

17. Nelle stesse ipotesi dimostrare che tutti i punti di uno stesso raggio per O, hanno velocità, accelerazioni parallele e proporzionali; i centri di curvatura delle loro traiettorie sono su di una retta perpendicolare alle normali delle traiettorie.

Le formule dell'esercizio (14), variando x, y e z proporzionalmente, mettono subito in evidenza le prime proprietà. Le accelerazioni normali, i raggi di curvatura sono propor-

zionali; quindi i centri di curvatura sono su di una retta (asse di curvatura), che è nel piano POz. Dalla (7) del Cap. 2° risulta

$$\ddot{P}|(P-O)=\frac{v^2}{\rho}N|(P-O)=\omega^2(M-P)|(P-O)=v^2$$

onde

$$N|(P-O)=\rho,$$

cioè il raggio di curvatura è la proiezione ortogonale di $P-O$ su N; onde è vero, ecc.

(GILBERT, Comp. Rend. 5, 19 novembre 1888. SCHELL, l. c., I, p. 493).

18. Trovare il luogo dei punti la cui accelerazione è centrale cioè diretta verso O; o in generale verso un punto qualunque.

Deve essere

$$\ddot{P}=\lambda(P-O)$$

e poichè (eserc. prec.) la proiezione dell'accelerazione su $P-O$ è $v^2:\mathrm{mod}\,(P-O)$, così si conclude che tale deve essere per quei punti il valore dell'accelerazione; l'accelerazione tangenziale è nulla. Esprimendo che $w_{sx}, \ldots$ sono eguali a $\lambda x, \ldots$, si ottiene per λ una equazione cubica. I punti stanno dunque su tre rette (una almeno reale). I punti la cui accelerazione è diretta ad un punto x_0, y_0, z_0 sono su di una curva di 4° ordine.

19. Se nel moto continuo di un sistema rigido, l'asse di moto elicoidale istantaneo è fisso nel corpo, esso è pure fisso nello spazio e viceversa.

In tal caso infatti Γ' (oppure Γ) si riduce ad una retta.

Il teorema vale pel moto piano, o intorno a un punto fisso (CAUCHY, mem. citata).

20. Nel moto di un sistema rigido nello spazio come si modificano le (8) e (16) del Cap. 4°

se all'istante t si assume per asse z l'asse di moto elicoidale e per asse x la minima distanza tra questo e la sua posizione all'istante $t + dt$?

Si ha $p = q = 0$, $r = \omega$, $u_0 = v_0 = 0$, $w_0 = V$ (velocità di traslazione). Le componenti della velocità angolare all'istante $t + dt$ essendo $\dot{p}\,dt$, $\dot{q}\,dt$, $r + \dot{r}\,dt$ si ha ancora $\dot{p} = 0$ e $\dot{u}_0 = 0$; onde

$$v_{sx} = -\omega y, \quad v_{sy} = \omega x, \quad v_{sz} = V,$$

$$w_{sx} = \dot{q} z - \dot{\omega} y - \omega^2 x, \quad w_{sy} = \dot{v}_0 + \dot{\omega} x - \omega^2 y, \quad w_{sz} = \dot{w}_0 - \dot{q} x.$$

21. Nelle ipotesi dell'esercizio precedente dimostrare che esiste un centro di accelerazione e trovare il luogo dei punti la cui accelerazione tangenziale o normale è nulla, o è diretta ad un punto fisso.

Vi ha un sol punto per cui $\ddot{P} = 0$, purchè $\omega^4 \dot{q}^2 \neq 0$; il luogo dei punti la cui accelerazione totale è costante sono su ellissoidi col centro nel punto di accel. nulla. Se $\dot{P} | \ddot{P} = 0$, si ha la quadrica

$$\omega \dot{\omega} (x^2 + y^2) - \omega \dot{q} y z + (\omega \dot{v}_0 - \dot{q} \dot{w}_0) x + V \dot{w}_0 = 0;$$

la sezione con $z = 0$ è un cerchio; con $y = 0$ due rette parallele.

Se $\ddot{P} = \lambda \dot{P}$, λ soddisfa ad una equazione cubica; il luogo è una cubica gobba, ecc.

Si può ancora osservare che su ogni retta del sistema $(\alpha, \beta, \dots \nu)$ vi ha un punto la cui accelerazione è normale oppure parallela alla retta; il primo è nella intersezione della retta col piano

$$\alpha x + \beta y = \frac{1}{\omega^2} (\dot{q} \mu + \dot{\omega} \nu + \dot{w}_0 \gamma) = \text{cost.}$$

22. Nel moto continuo di un sistema rigido intorno ad un punto fisso (giroscopio), le velocità

istantanee di rotazione secondo gli assi mobili sono proporzionali ai coseni direttori che questi assi formano con una retta fissa. Trovare il cono Γ', ecc.

Un tal moto (vedi parte 3ª, Cap. 5) dicesi alla POINSOT; l'asse fisso sia z_1 onde

$$P = Ap = Gc_1\,,\quad Q = Bq = Gc_2\,,\quad R = Cr = Gc_3$$

(A, B, C, G costanti); e per le (17) del Cap. 4° risultano le tre equazioni diff.

$$A\dot{p} = (B - C)qr\,;\ \text{ecc.}\quad \dot{P} = \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)QR\,;\ \text{ecc.}$$

Del primo sistema si hanno due integrali cioè

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = 2h,$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 = G^2\,.$$

La poloide è intersezione di queste due quadriche; l'equazione di Γ' è

$$Ap^2(2h - AG^2) + \ldots = 0.$$

Poichè

$$r_1 = pc_1 + qc_2 + rc_3 = \frac{2h}{G^2}\,,$$

l'erpoloide è contenuta in un piano normale all'asse fisso.

Considerando connessa col corpo la quadrica

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 2h = \text{cost.}$$

su cui giace il polo, il piano tangente nel polo è normale all'asse fisso che taglia a distanza costante da O; il moto si riproduce col rotolamento di una quadrica a centro fisso su di un piano fisso (invariabile) con velocità propor. al raggio vettore, ecc. L'erpoloide, curva tracciata dal punto di contatto sul piano, è trascendente e può o no presentare flessi.

(POINSOT, *Théor. nouvelle,* etc., HESS, *Das Rollen ein. Fläche 2. Grad.* Munich, 1880).

23. Il moto risultante di un moto alla POINSOT e di una rotazione uniforme intorno alla nor-

male al piano invariabile è parimenti un moto alla POINSOT; le quadriche basi sono omofocali.

Da esercizio precedente

$$\frac{P^2}{A}+\frac{Q^2}{B}+\frac{R^2}{C}=2h,\quad P^2+Q^2+R^2=G^2.$$

Se ξ è l'angolo che $x z_1$ forma con $x_1 z_1$, si ha

$$\dot{\xi}=G\left(\frac{Q^2}{B}+\frac{P^2}{C}\right):(Q^2+P^2).$$

Cambiando $\frac{1}{A}$ in $\frac{1}{A}-\lambda$, le equazioni diff. non variano e neanche gl'integrali purchè si cambi $2h$ in $2h+\lambda G^2$; $\dot{\xi}$ aumenta di una costante; onde è vero, ecc.

[SYLVESTER, Philos. Trans., 156 (1866)].

24. In un moto alla POINSOT ogni quadrica omociclica alla quadrica base rotola senza strisciare su di una quadrica fissa di rotazione intorno all'asse fisso.

Ogni quadrica

$$(\alpha)\qquad (A-\lambda)x^2+\ldots=\text{cost.}=2h$$

ha colla base stesse sezioni circolari, è cioè omociclica ed è segata dall'asse istantaneo $x=\mu p,\ldots$ in un punto per cui

$$\mu^2=2h(2h-\lambda\omega^2)^{-1}.$$

Rispetto ad assi fissi

$$z_1=\frac{2h}{G}\mu;\qquad x_1^2+y_1^2+z_1^2=\mu^2\omega^2;$$

ed eliminando ω si ha

$$(\beta)\qquad \left(\frac{G^2}{2h}-\lambda\right)z_1^2-\lambda(x_1^2+y_1^2)=2h.$$

Il piano tangente ad (α) nel polo ha rispetto assi mobili l'equazione

$$(A-\lambda)xp+\ldots=2h:\mu;$$

per riferirla ad assi fissi basta osservare che

$$A p x + \ldots = G(c_1 x_1 + \ldots) = G z_1$$
$$p x + \ldots = p_1 x_1 + \ldots ;$$

onde $$G z_1 - \lambda(p_1 x_1 + \ldots) = \frac{2h}{\mu};$$

cioè, per essere $r_1 = 2h : G$,

$$\frac{G^2}{2h} r_1 z_1 - \lambda(p_1 x_1 + \ldots) = \frac{2h}{\mu};$$

tangente a (β) nello stesso punto (polo istantaneo): onde (α) rotola su (β). Se $\lambda = 0$, (α) è la base, (β) una coppia di piani (eserc. 22).

Se $\lambda = G^2 : 2h$, (β) è un cilindro di rotazione e se di più

$$A < G^2 : 2h < B < C$$

(α) è un iperboloide a due falde.

[Siacci, In memor. D. Chelini, Collec. Mathem. (1881); Gebbia, Mem. Acc. Lincei (1885)].

25. Studio di alcune delle proprietà del quadrilatero piano articolato.

Si deve studiare il moto di una biella AB i cui estremi descrivono due cerchi di centri fissi O ed O', detto dagli inglesi «three Bar Motion» (vedi esercizio 3). L'intersezione C di OA e $O'B$ è il centro di rotazione. Un punto P rigidamente connesso con la biella descrive una curva a lunga inflessione o curva di Watt (Loria, l. c., p. 232), che può essere generata in due altri modi per mezzo di altre due sistemi a tre aste (Roberts).

È una curva di 6° ordine avente i punti ciclici come punti tripli (tricircolare), con tre nodi e due fuochi O, O'. I nodi sono su di un cerchio passante per O e O' e capace dell'angolo APB.

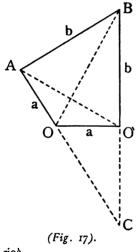
[Roberts S. e Cayley, Proc. of the London Mathem. Soc. **2** (1869); **3** (1870); **4** (1872); **6** (1874); **7** (1875), pag. 14-23].

La trattazione di alcuni casi particolari è semplice, e più interessante.

Se i due cerchi sono eguali e di raggio b, posto $OO'=2a$, $AB = 2c$, il punto medio di AB descrive la curva

$$(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + c^2 - a^2 - b^2)^2 + 4a^2 y^2 (x^2 + y^2 - b^2) = 0;$$

se $c = a$, essa si spezza in un cerchio ed in una lemniscata di Booth e se finalmente $b = a\sqrt{2}$, in una ordinaria lemniscata (Loria, p. 238).

(Fig. 17).

Se

$$OA = OO' = a;$$

$AB = O'B = b$ si ha la figura di un cervo volante; ogni punto connesso con AB descrive una curva bicircolare unicursale, podaria di una conica. Si può notare che le due curve Γ e Γ' sono due ovali di Cartesio.

Infatti

$$\text{ar.}\, ACB = \text{ar.}\, OCO' + 2\,\text{ar.}\, OO'B$$

e posto

$$OC = \rho; \quad O'C = \rho';$$
$$AC = R, \quad BC = R'$$

risulta

$$b(a + \rho) = a\rho' + 2ab$$

cioè

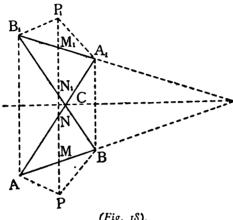
$$b\rho - a\rho' = ab$$

ovale di cui due fuochi sono O e O' (curva Γ); inoltre

$$bR - aR' = ab$$

ovale di cui due fuochi sono A e B (curva Γ').

26. Dell'antiparallelogrammo di Hart. Antiparallelogrammo sferico.

È la figura formata da due lati e da due diagonali di un trapezio isoscele; se è fisso il lato AB più corto, oppure

(Fig. 18).

il più lungo AA_1, C è sempre il centro istantaneo. Nel primo caso Γ e Γ' sono due ellissi coi rispettivi fuochi A, B ed A_1, B_1: nel secondo, due iperboli; sono curve simmetriche rispetto alla tangente in C. Conoscendosi inoltre i centri di curvatura A e B delle traiettorie di A_1 e B_1 è determinato il cerchio dei flessi. Considero un punto P_1 connesso con $A_1 B_1$ ed il suo simmetrico P; il punto medio di MM_1 descrive la podaria di P rispetto alla ellissi Γ; onde P_1 descrive una curva simile.

Pongasi

$$MN = \rho; \qquad MN_1 = \rho_1 .$$

Dai triangoli ABB_1 ed MBN_1 si deduce

$$AB_1 : \rho_1 = AB : BM$$

e poi

$$A_1 B : \rho = AB : AM$$

donde

$$\rho\rho_1 = \frac{AM \cdot BM}{\overline{AB}^2} AB_1 \cdot A_1 B$$

e poichè

$$AB_1 \cdot A_1 B + \overline{AB}^2 = \overline{AA_1}^2$$

si deduce che $\rho\rho_1$ è costante durante la deformazione dell'antiparallelogrammo. Se quindi immaginiamo libere tutte le aste; fisso il punto M e, mediante una quinta asta, facciamo muovere N su di un cerchio di centro M, il punto N_1 descriverà l'inversa, rispetto al centro, di tal cerchio, cioè una retta. Avremo con ciò realizzata la trasformazione rigorosa di un moto circolare in rettilineo.

Di qui il nome di *inversore* dato a questo sistema articolato.

Notando che ogni sistema articolato capace di tale trasformazione deve essere formato di un numero dispari di aste, e che con tre essa non riesce, si conclude che tale inversore di HART contiene il *minimo* numero di aste.

Costruito da BRÉGUET, fa pure parte della collezione dei modelli matematici di SCHILLING.

È infine da notare che le stesse considerazioni assai agevolmente si possono estendere allo studio dell'antiparallelogrammo sferico; le curve sferiche Γ e Γ' sono due ellissi (iperboli) sferiche.

Scegliendo l'asse z passante pel centro di sfera e pel punto medio di AB; l'asse y passante pel polo di AB e posto

$$\text{arco } AA_1 = 2a, \quad \text{arco } AB = 2c$$

e dette x, y, z le coordinate di C, si ottiene

$$\text{sen } CA = z \cos c \text{ tag } a - x \text{ sen } c \text{ cotg } a$$

$$\cos CA = z \cos c + x \text{ sen } c$$

onde l'equazione del cono Γ è

$$\frac{x^2}{\text{tag}^2 a} + \frac{y^2}{\text{tag}^2 b} - z^2 = 0$$

dove

$$\tang^2 b = \frac{\sen^2 a - \sen^2 c}{\cos^2 a}.$$

Lo stesso vale naturalmente per il cono Γ'. Inoltre essendo la corda PP_1 normale al piano tangente al cono Γ, il luogo di PP_1 è pure un cono quadratico e la curva P_1 è una conica sferica.

(SELLENTIN, *Ub. die Rouletten des sphär. Antip.* Jena 1881).

27. Inversore di PEAUCELLIER.

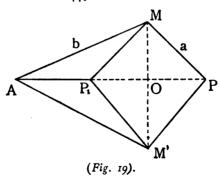
Nel quadrilatero articolato $AMPM'$ le diagonali si tagliano ad angolo retto in O; (potrebbe inoltre per più semplicità supporsi $AM = AM'$, ecc.).

Sia $OP = OP_1$, $MP = a$, $MA = b$, $AP = \rho$, $AP_1 = \rho_1$. (Il punto P_1 potrebbe cadere anche a sinistra di A). Poichè

$$\overline{AO}^2 - \overline{OP}^2 = b^2 - a^2,$$

risulta

$$\rho\rho_1 = b^2 - a^2.$$

(*Fig.* 19).

Se quindi P_1, collegato con A mediante una *settima* asta, descrive un cerchio, P descrive una retta.

[PEAUCELLIER, Nouvelles Ann., 1864 e 1873: fu trovato

anche da LIPKINE (1870), Bull. de l'Ac. de St.-Pétersbourg, **16** (1871)].

La scoperta di PEAUCELLIER della risoluzione rigorosa del problema della trasformazione di un moto circolare in rettilineo, è stata il punto di partenza di tutti i numerosi lavori sui sistemi articolati, dal 1870 in poi. Si può consultare la lettura di SYLVESTER alla Royal Institution, *Transformation du mouvement circulaire,* etc. riprodotta nella Revue Scientifique **4** (2) (1874), p. 490, in cui sono descritti numerosi e più complicati sistemi articolati con 7, 9, 11, 13, 15, 73 aste.

Cfr. pure: LIGUINE, Nouvelles Annales, **14** (2) (1875).

Questi sistemi però, anche i più semplici, non si sono riconosciuti opportuni in pratica; tanto più dopo i fondamentali lavori di CEBICEFF; questi ha potuto costruire un sistema articolato di *tre sole aste* col quale si ottiene la risoluzione approssimata del problema nel miglior modo desiderabile (Mémoires de St.-Pétersbourg, **60**).

Sui sistemi articolati si fondano poi molti istrumenti (compassi) per il tracciamento di speciali curve; e si ha un compasso per le curve di CASSINI, per la lumaca di PASCAL, ecc. dovuto ad HART [Messeng. of Mathem. **4** (1874); **6** (1876); **7** (1877)]. KEMPE ha poi dimostrato che qualunque curva algebrica piana può essere descritta mediante un sistema articolato.

[*On a general Method of describing plane Curves of the n^{th} degree by linkwork.* Proceed. of the Lon. Mathem. Soc. **7** (1876), p. 213-216)].

PARTE SECONDA

STATICA.

CAPITOLO PRIMO.

COMPOSIZIONE DELLE FORZE.

§ 1. **Oggetto della Statica.** — Noi dobbiamo esercitare uno sforzo, una pressione, per mettere in moto un corpo, che è in riposo, o per variare od impedire il suo movimento; ed abbiamo infatti la sensazione del peso di un corpo cui impediamo di cadere, della spinta da imprimergli per farlo discendere su di un piano inclinato; ecc. Noi possiamo soltanto valutare gli effetti di questi sforzi, di queste pressioni, che chiamiamo, genericamente, *forze*. Generalizzando questo concetto assai relativo e in origine limitato soltanto alla nozione di peso o di sforzo muscolare, si chiamano forze tutte le cause che producono, modificano, distruggono, il movimento di un corpo. L'oggetto della Meccanica è quello di stabilire, sperimentalmente e col calcolo, tra le cause e i movimenti, delle leggi che permettano la esatta descrizione del moto, cognite le cau-

se; oppure di risalire, se è possibile, a queste, cognito il moto.

La Statica si occupa di un problema molto più particolare del precedente; investiga cioè le leggi a cui obbediscono uno o più corpi, soggetti a forze, perchè il sistema resti in riposo o non risulti disturbato il suo movimento; cioè perchè resti in *equilibrio*.

Questa parte della Meccanica, la prima che in ordine cronologico sia stata considerata, è perciò detta *scienza dell'equilibrio* *.

Per l'importanza dei problemi che tratta; per la varietà delle applicazioni pratiche; per le proprietà notevoli che viene a stabilire tra sistemi di forze e movimenti istantanei; ed infine perchè, per varie considerazioni, non è conveniente dedurre da considerazioni di movimenti (dinamiche) ciò che è relativo all'equilibrio, noi cominceremo dalla trattazione di questa parte della Meccanica **.

---

* Oltre il trattato dell'APPELL, I, confrontare: *A Treatise on Analytical Statics with numerous examples* by E. J. ROUTH, Vol. I. Cambridge 1896; THOMSON and TAIT, *Treatise on Natural. Philos.*, Part. II (1895), Ch. VII.

** PONCELET nel 1827 [*Introd. à la Méc. Industrielle* (1829)], poi CORIOLIS [*Traité de la Méc. d. corps solides* (1829)] e BELANGER [*Cours de Mécanique* (1847)] e moltissimi dei moderni, seguono invece il metodo inverso, di premettere cioè la Dinamica alla Statica, per *non considerare le forze in modo troppo astratto e indipendentemente dalla loro esistenza e dai loro effetti.*

§ 2. **Forza e sua rappresentazione.** — Una pressione, uno sforzo, possono esercitarsi in varie direzioni ed essere impressi ad un'area piccolissima della superficie di un corpo o ad un volume infinitamente piccolo del corpo: diciamo quindi che una forza agisce secondo una direzione *(direzione della forza)* e in un punto *(punto di applicazione)*.

Due forze aventi lo stesso punto d'applicazione diconsi eguali allorchè applicate in senso contrario l'una all'altra si fanno equilibrio *(postulato della eguaglianza)*.

La definizione di una forza somma di più altre si basa su di un altro postulato. Due forze aventi lo stesso punto d'applicazione e la stessa direzione possono essere equilibrate da una forza unica avente lo stesso punto d'applicazione e direzione opposta. La forza eguale e contraria (cioè opposta) a questa dicesi *somma* delle due prime.

Dai concetti di eguaglianza e di somma è facile dedurre quello di rapporto (razionale o irrazionale) tra due forze. Scelta adunque una certa unità di misura, per ora assolutamente arbitraria, il numero che misura una forza è positivo, razionale od irrazionale. Converremo di rappresentare una forza con un vettore applicato nel punto d'applicazione, la cui direzione sia quella della forza ed il cui modulo sia eguale al numero che misura la forza. Gli sviluppi seguenti renderanno ancora più intima ed efficace la rappresentazione suddetta.

§ 3. **Postulati della Statica.**—Oltre quelli già detti ci fonderemo sui seguenti postulati, desunti, per via di generalizzazione, da ovvii fatti sperimentali.

1°. *L'equilibrio di un qualunque assieme di corpi rigidi o no, non è alterato rendendo fissi alcuni punti; introducendo altri legami (vincoli) in modo da limitare la mobilità dell'assieme; o anche, infine, supponendo irrigidito tutto il sistema (principio di solidificazione)* *.

Di qui si deduce che le condizioni *necessarie e sufficienti* per l'equilibrio di un sistema rigido, sono solamente *necessarie* per l'equilibrio di un sistema qualunque non rigido.

2°. *L'equilibrio di un sistema di forze non è alterato aggiungendo un altro sistema purchè questo agendo da solo sull'assieme di corpi sia in equilibrio.*

Invece, in generale, non è permessa la soppressione di un siffatto sistema e possiamo convincercene col seguente esempio. Agli estremi di un filo flessibile ma inestendibile siano applicate due forze A ed A' eguali e contrarie e che tendano il filo; agli stessi punti siano applicate altre due forze B e B' eguali ed agenti in senso contrario ad A ed A' rispettivamente. Se B è minore di A, e quindi B' di A', il sistema delle quattro forze

* Poinsot, J. Éc. Polytechn., **13**; 1806.

tiene in equilibrio il filo; ma il sistema A e A', che pur agendo da solo ha lo stesso ufficio, non può esser tolto senza turbar l'equilibrio.

3°. *Ad un sistema di forze in equilibrio o no si possono sempre aggiungere o togliere forze opposte, cioè eguali, contrarie e aventi lo stesso punto di applicazione, senza che venga turbato l'effetto del sistema.*

Si deducono di qui alcune notevoli conseguenze.

Due sistemi le cui forze sono opposte, diconsi opposti; si indicheranno con S e $-S$.

Se S è in equilibrio (compatibilmente colla mobilità del sistema cui S è applicato), non lo è, in generale, il sistema opposto. Così, nell'esempio precedente, il sistema opposto ad A ed A' non tiene in equilibrio il filo. Se però S è applicato ad un sistema rigido ed è in equilibrio, anche $-S$ è in equilibrio: p. es. se il filo è sostituito da un'asta rigida.

TEOREMA I.—*Da un sistema di forze in equilibrio si può sopprimere un altro sistema di forze, purchè il sistema opposto, agendo da solo, sia in equilibrio* *.

Un sistema S in equilibrio contenga un altro sistema S_1; ed il sistema $-S_1$, agendo da solo, sia in equilibrio. Aggiungo $-S_1$ ad S (post. 2°); ma

* MÖBIUS, *Lehrbuch d. Statik.* Ges. Werke, 3 (1837), pag. 5.

le forze di $-S_1$ eliminano (post. 3°) quelle di S_1, onde S_1 è eliminato.

Nel solito esempio il sistema A, A' non può effettivamente essere tolto, pur essendo da solo in equilibrio, perchè non lo è il sistema opposto; mentre il sistema B, B', che pur agendo da solo non è in equilibrio, può esser tolto perchè il suo opposto è in equilibrio.

TEOREMA II.—*Da un sistema di forze che tiene in equilibrio un corpo rigido, si può sopprimere un altro sistema purchè questo agendo da solo sia in equilibrio.*

Infatti, in tal caso, è in equilibrio il sistema opposto.

TEOREMA III.—*Il punto d'applicazione di una forza può trasportarsi in un altro punto della sua linea d'azione purchè rigidamente connesso col primo.*

In A sia applicata la forza F e sia B un punto rigidamente connesso con A sulla direzione di F; in B (post. 3°) aggiungo due forze F' ed F'' opposte; inoltre F' sia eguale ad F. Ma il sistema F ed F'' è in equilibrio e (teor. precedente) può essere tolto; resterà la F' applicata in B.

Prendiamo ora a considerare più specialmente i sistemi di forze che sollecitano corpi rigidi; e stabiliamo, rispetto a questi, l'importante concetto di *sistemi equivalenti di forze*.

Due sistemi S_1 ed S_2 di forze sono *equivalenti*

se esiste un terzo sistema S che sia separatamente in equilibrio con S_1 ed S_2. Allora ogni altro sistema S' in equilibrio con S_1 è pure in equilibrio con S_2. Infatti il sistema formato di S_1, S', S_2, S è in equilibrio (post. 2°); ma anche S_1, S è in equilibrio e può quindi sopprimersi (teor. II); dunque il sistema S_2, S' è in equilibrio.

Se poi riflettiamo che S_1 è in equilibrio con $-S_1$, concludiamo che *due sistemi sono equivalenti se uno dei due è in equilibrio coll'opposto dell'altro.*

4°. *Le forze le cui linee d'azione incontrano punti od assi fissi possono sopprimersi, senza turbare l'effetto del sistema cui appartengono.*

5°. *Se in un punto di un corpo rigido avente un punto (asse) fisso, è applicata una forza la cui linea d'azione non incontra il punto (asse) fisso, il sistema non è in equilibrio.*

Ammetteremo inoltre *il principio dell'eguaglianza dell'azione e della reazione* (vedi parte 3ª, Cap. 1°).

§ 4. **Il postulato della risultante.**—Supponiamo che più forze siano applicate ad uno stesso punto O. Se sono in equilibrio, anche il sistema opposto è in equilibrio; se non si fanno equilibrio si ammette il seguente postulato:

Più forze concorrenti e non in equilibrio possono essere equilibrate da una sola forza.

Questa forza R' è pure concorrente in O;

infatti, in caso contrario, rendendo fisso il punto O, l'equilibrio (post. 2°) non dovrebbe essere turbato e ciò non è perchè (post. 5°) la R' non passa per O. Il sistema S delle forze concorrenti è quindi equivalente alla forza R opposta alla R'. Tale forza R dicesi *risultante* del sistema S.

Si può anche dire che quando più forze concorrenti si fanno equilibrio, una qualunque di esse è opposta alla risultante delle altre.

La risultante R di due forze P, Q concorrenti, è contenuta nel loro piano; basta infatti tracciare una retta che si appoggi a P e Q, supporla quindi fissa ed imitare la dimostrazione precedente.

Tre forze concorrenti in equilibrio giacciono in uno stesso piano.

Sarebbe importante, dal punto di vista logico, determinare con considerazioni puramente statiche e in base ai soli postulati ammessi, tale risultante. Ma questo non è, pare, possibile. Quindi tale determinazione deve essere o direttamente richiesta all'esperienza o occorre aumentare notevolmente il numero dei postulati; ai quali non sembra dover sfuggire nessuna determinazione congenere.

Bisogna infatti ammettere anzitutto:

La risultante di più forze concorrenti non varia sostituendo a due o a più forze la loro risultante parziale e qualunque sia l'ordine delle composizioni parziali: cioè deve godere del principio associativo e permutativo.

Questo principio riconduce tutta la determinazione a quella della risultante di due sole forze.

Siano P, Q due forze applicate in O; e sia R_1 un'altra forza pure applicata in O ed esterna al piano delle due prime. Diciamo R la risultante di P, Q; P_1 quella di Q, R_1, e Q_1 quella di P ed R_1. La risultante S di P, Q, R_1 si otterrà (principio precedente) componendo R con R_1; oppure P con P_1, od infine Q con Q_1; e poichè essa giace nei piani R, R_1; ecc. si conclude che i tre piani R e R_1; P e P_1; Q e Q_1 passano per una stessa retta. Centro in O e con raggio arbitrario tracciamo una sfera ed accenniamo con P, P_1, ecc. i punti d'incontro colle rispettive forze P, P_1, ... S. Abbiamo dunque un triangolo sferico PQR_1 e le trasversali PP_1, ... concorrenti in un punto S. Il teorema di CEVA * ci dà

$$\frac{\operatorname{sen} QR}{\operatorname{sen} PR} \cdot \frac{\operatorname{sen} PQ_1}{\operatorname{sen} R_1 Q_1} \cdot \frac{\operatorname{sen} R_1 P_1}{\operatorname{sen} QP_1} = -1.$$

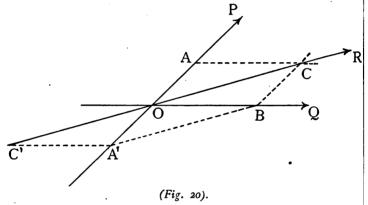
Se R_1 è normale al piano PQ ed eguale all'unità di misura, il rapporto $\operatorname{sen} PQ_1 : \operatorname{sen} R_1 Q_1$ non dipende che dalla forza P e possiamo rappresentarlo con $\varphi(P)$; il rapporto analogo $\operatorname{sen} QP_1 : \operatorname{sen} R_1 P_1$ sarà espresso da $\varphi(Q)$, e quindi

$$\operatorname{sen} QR : \operatorname{sen} RP = \varphi(Q) : \varphi(P).$$

Questa s'interpreta subito; la direzione della

* BALTZER, Parte 6ª, Trigonometria, § 7.

risultante R è quella della diagonale OC del parallelogrammo costruito su due segmenti OA ed OB eguali a $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ e rispettivamente situati su P e Q o in direzione contraria, secondo che $\varphi(P)$ e $\varphi(Q)$ sono positivi o negativi. Quanto poi alla grandezza, osserviamo che la R' eguale e contraria ad R è in equilibrio con P e Q; quindi

(*Fig.* 20).

P è pure opposta alla risultante di Q ed R'; il parallelogrammo costruito su OB ed $OC' = \varphi(R')$ ha dunque per diagonale OA' e però $OC' = OC$; onde $OC = \varphi(R)$.

Di qui possiamo subito passare alla composizione di più forze concorrenti P, Q, ...; basterà comporre i vettori $\varphi(P)$, $\varphi(Q)$, ecc. posti rispettivamente sulle forze; il vettore risultante dà la direzione della forza risultante R ed il suo modulo è inoltre eguale a $\varphi(R)$.

Tutto adunque si riduce alla ricerca della funzione φ. Ora se più forze P, Q, ... coincidono, pel postulato della somma, nella composizione esse possono essere sostituite da $P + Q + \cdots$; e quindi nella composizione dei corrispondenti vettori dobbiamo avere lo stesso risultato operando con $\varphi(P) + \varphi(Q) + \cdots$; oppure con $\varphi(P + Q + \cdots)$.

Si ha dunque l'equazione funzionale

$$(1) \quad \varphi(P + Q + \cdots) = \varphi(P) + \varphi(Q) + \cdots;$$

la quale non ci abilita a conoscere la funzione φ senza fare un'altra ipotesi. Infatti si deduce subito, m ed n essendo interi e positivi:

$$\varphi(nP) = n\varphi(P);$$

e quindi

$$\varphi(n) = n\varphi(1); \quad \varphi(1) = n\varphi\left(\frac{1}{n}\right)$$

donde:

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n}\varphi(1);$$

cioè per ogni valore razionale e positivo di x, abbiamo

$$\varphi(x) = ax$$

a essendo una costante. E questa relazione, nella ipotesi che φ *sia continua* varrà ancora per qualunque valore di x *. In questo caso adunque si è aggiunta la *nuova ipotesi* della continuità della ri-

---

* CAUCHY, *Cours d'Analyse*. Œuvres compl. (2), 3, p. 99.

sultante. Potremmo invece supporre φ sempre *positiva,* cioè la risultante compresa nell'angolo delle due forze. In tale ipotesi φ è sempre crescente; se quindi x è un numero irrazionale per modo che

$$\frac{m}{n} < x < \frac{m+1}{n},$$

sarà pure

$$\varphi\left(\frac{m}{n}\right) < \varphi(x) < \varphi\left(\frac{m+1}{n}\right),$$

cioè

$$a\frac{m}{n} < \varphi(x) < a\frac{m+1}{n};$$

dunque

$$\varphi(x) = a\,x.$$

Ma possiamo assumere $a = 1$; quindi *le forze concorrenti si compongono componendo i vettori che le rappresentano ;* od anche:

La forza è un vettore applicato che segue le leggi della composizione e decomposizione dei vettori applicati *.

---

* La legge del parallelogrammo delle forze, forse sconosciuta agli antichi, fu trovata da STEVIN (vedi più sotto al § 8) e dedotta da NEWTON [*Philosophiae naturalis principia matematica* (1687). Axiomata sive leges motus. Coroll. 1] come conseguenza delle leggi del moto, di cui parleremo in dinamica; e, colla nota considerazione dei moti simultanei, da VARIGNON, pure nel 1687 e poi nella *Nouvelle Mécanique ou Statique*, **1** (1725), che ne fece numerose applicazioni al poligono delle forze, decomposizione, ecc., **2**, p. 299.

§ 5. **Equivalenza tra sistemi di forze e di vettori** *. — Dato un sistema di forze possiamo, come si è fatto per i vettori (Parte 1ª, Cap. 1°, § 7), definire la forza ed il momento risultante rispetto ad una origine e che diremo pure *coordinate* del sistema di forze.

Le coordinate di un sistema sono eguali e di segno contrario a quelle del sistema opposto.

Ora dobbiamo porre in relazione il concetto di equivalenza di sistemi di forze con quello di sistema di vettori.

D. BERNOULLI nei Comm. de S. Pétersbourg, **I** (1726) è il primo che abbia tentato dare una dimostrazione statica; da allora in poi sono state date innumerevoli dimostrazioni, per le quali valgono sempre le osservazioni fatte.

La prima dimostrazione in cui venga adoperata una equazione funzionale è quella di D. de FONCENEX [Mélanges de Philos. et mathém. de Turin (1760-61), p. 305]. Quella da noi esposta è di DARBOUX [Bull. d. Sciences mathém. et Astr. **9** (1875), pag. 281]. Una analoga è stata esposta dal CEBICEFF [Société mathém. de Moscou (dicembre 1875)]. Vedi pure dello stesso una memoria nel Bull. de la Soc. mathém. de France, **6** (1877-78), p. 188, che riguarda la non necessaria condizione di continuità della φ.

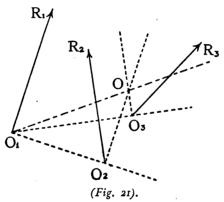
Circa poi le condizioni più generali in cui è possibile risolvere la (1) vedi pure: DARBOUX, Mathem. Annal., **17** (1880). Cfr. ancora: SIACCI, *Sulla comp. d. forze nella Statica e sui suoi postulati.* Rend. Acc. Napoli, fascic. 2, 3, 4 (1899).

* Qui intendiamo parlar sempre di vettori applicati.

Osserviamo anzitutto che

Si possono aggruppare e comporre le forze di un sistema in modo da ridurle a due oppure ad una forza sola.

Siano O_1, O_2, O_3 tre punti tali che il loro piano non contenga nessuno dei punti di applicazione delle forze, ognuna delle quali potrà decom-

(*Fig. 21*).

porsi, sempre, in altre tre applicate in O_1, O_2, O_3. Diciamo R_1, R_2, R_3 rispettivamente le risultanti di quelle concorrenti in O_1, O_2, O_3. Per O_1 tracciamo una retta che si appoggi ad R_2 ed R_3 e su questa assumiamo un altro punto O.

Decomponiamo R_2 in altre due secondo O_1O_2 e O_2O; e la R_3 in altre due secondo O_1O_3 e O_3O; componendo infine le tre forze in O_1 e le due in O, avremo ridotto il sistema a due forze sole.

I casi particolari si trattano facilmente; solo notiamo che se le due forze si incontrano, il sistema è riducibile ad una forza unica; nel caso contrario non è ulteriormente riducibile.

Infatti dimostreremo che:

Due forze le cui linee d'azione non s'incontrano non ammettono risultante; cioè non possono essere equilibrate da un'altra forza e nè possono farsi equilibrio.

Se infatti potessero farsi equilibrio, fissando un punto di una delle due forze (post. 1°), l'altra non può equilibrare il corpo rigido (post. 5°); se poi potessero essere equilibrate da una forza unica, basterebbe fissare un asse che ne incontri due e ragionare come al solito. Discende subito che:

Affinchè due forze si facciano equilibrio è necessario, e basta, che siano opposte.

Notiamo poi che in tutte le trasformazioni impiegate per ridurre un sistema a due forze sole, le coordinate del sistema (identiche a quelle dei vettori rappresentativi) non variano.

Ciò premesso possiamo dimostrare:

Un sistema di forze le cui coordinate sono nulle è in equilibrio e reciprocamente.

Riduciamo infatti il sistema a due forze; le coordinate del sistema così ridotto sono ancora nulle e le due forze sono opposte; dunque sono in equilibrio.

Se, reciprocamente, il sistema è in equilibrio, anche le due forze si fanno equilibrio e però sono opposte e quindi esso ha nulle le coordinate.

Due sistemi di forze aventi le stesse coordinate sono equivalenti e reciprocamente. Siano S ed S' i due sistemi; il sistema $S, -S'$ ha coordinate nulle; S è quindi in equilibrio con $-S'$ e però equivalente ad S'. Reciprocamente, se S è equivalente ad S' e quindi in equilibrio con $-S'$, le coordinate di S sono opposte a quelle di $-S'$ ed uguali a quelle di S'.

Possiamo più concisamente dire:

Due sistemi di forze sono equivalenti, se sono equivalenti i sistemi di vettori rappresentativi delle forze.

Dopo ciò possiamo applicare alla riduzione dei sistemi di forze, quanto si è detto sui sistemi di vettori (Parte 1ª, Cap. 1°, § 7, 8, 9, 10) e instituire un paragone colla composizione dei moti istantanei (Parte 1ª, Cap. 4°, § 4).

Ci limiteremo a riassumere le più importanti conseguenze.

§ 6. **Riduzioni varie di un sistema di forze.—** Coordinate di una forza sono le coordinate del vettore che la rappresenta. Se F è l'intensità; α, β, ... ν, le coordinate della linea d'azione di una forza; le sue coordinate sono espresse da

$$F\alpha, \quad F\beta, \quad F\gamma, \quad F\lambda, \quad F\mu, \quad F\nu.$$

Le prime tre sono *le componenti della forza secondo gli assi* e si accennano anche con X, Y, Z; le altre tre rappresentano *i momenti della forza secondo gli assi;* oppure le componenti del momento della forza rispetto all'origine. Se le coordinate del punto d'applicazione di F sono x, y, z, riflettendo che

$$F\lambda = F(\gamma y - \beta z) = Zy - Yz,$$

potremo dire che le coordinate della forza F sono:

$$(2) \quad X, \ Y, \ Z, \ Zy - Yz, \ Xz - Zx, \ Yx - Xy.$$

Il sistema di due forze eguali e contrarie costituisce una *coppia di forze;* la quale, al pari di una coppia di vettori, o di rotazioni istantanee, è individuata dal suo asse momento. Le coppie si compongono e decompongono, componendo e decomponendo i loro momenti, come le forze.

Ad un sistema di forze è possibile sostituire, ed in infiniti modi, una forza ed una coppia; variando l'origine, la forza risultante non varia, ma varia il momento risultante; la sua proiezione sulla forza è costante.

Esiste un asse (centrale) per ogni punto del quale l'asse della forza e della coppia (momento) risultante hanno la stessa direzione; in tal caso la coppia risultante ha il valor minimo. Il sistema di una forza e di una coppia siffatta chiamasi *diname.*

Dal sistema di una forza e di una coppia si

§ 7. **Composizione di un sistema di forze parallele.** — Dal significato stesso di invariante risulta che (Parte 1ª, Cap. 1°, § 7), nel caso delle forze parallele, l'invariante è nullo; inoltre la risultante del sistema è eguale alla somma algebrica delle forze; e se questa è diversa da zero, come in primo vogliamo supporre, *il sistema ammette una risultante unica.* Sia R; la $-R$ tiene in equilibrio il sistema; se poi tutte le forze sono parallele all'asse z e diciamo ξ, η le coordinate del punto in cui R incontra il piano x, y, le coordinate di R sono

$$0, \quad 0, \quad R, \quad \eta R, \quad -\xi R, \quad 0.$$

Quindi per le (5):

$$-R+\sum F=0; \quad -\eta R+\sum Fy=0; \quad \xi R-\sum Fx=0.$$

Le due ultime ci fanno dunque conoscere la linea d'azione di R.

Su questa consideriamo il punto G, tale che

$$G-O=\frac{\sum F(P-O)}{\sum F}. \tag{7}$$

Variando l'orientazione delle forze (pur restando parallele a loro stesse) la R ruoterà intorno al punto fisso G; tale punto non varia ancora se tutte le forze variano in uno stesso rapporto, essendo la (7) il quoziente di due funzioni lineari ed omogenee delle F. Un tal punto dicesi *centro delle forze parallele.* Esso è indipendente dall'origine O.

Se R è nulla il sistema è invece riducibile ad una coppia; ciò che risulta anche semplicemente così. Essendo $R=0$, nel sistema avremo un gruppo di forze di un senso (positive); e un gruppo di senso opposto (negative); sì delle une che delle altre esisterà il centro delle forze parallele in cui avremo applicate due forze costituenti una coppia. Potremo però sempre far ruotare le forze in modo da far loro assumere la direzione della congiungente i due centri suddetti; cioè in modo che il sistema sia in equilibrio in due diverse posizioni. Se poi, più in particolare, i due centri coincidessero, il sistema è in equilibrio per qualunque posizione delle forze.

Una delle più notevoli applicazioni della (7) è la seguente.

Supponiamo che le F siano applicate in modo continuo a tutti i punti di un corpo p. es. a tre dimensioni e siano inoltre proporzionali ai varii elementi di volume in cui si può decomporre il corpo e rispettivamente considerati intorno ai punti di applicazione. Il centro di queste forze parallele dicesi, per ragioni che vedremo nella Parte 3ª, *centro di gravità* o *centro di massa del corpo.*

Avremo quindi

$$(8) \qquad G-O=\int(P-O)\,dS:\int dS,$$

avendo, come al solito, accennato con dS l'elemento

di volume. Potremmo allo stesso modo definire il centro di gravità di un'area piana o curva, di una linea.

Se ci riferiamo ad una terna d'assi ortogonali e diciamo ξ, η, ζ le coordinate di G, le (7) e le (8) ci dànno subito

$$\xi = \sum F x : \sum F; \text{ ecc.} \tag{9}$$

$$\xi = \int x\, dS : \int dS; \text{ ecc.} \tag{10}$$

Nè d'altra parte staremo qui a ricordare alcuni dei più ovvii risultati relativi ai centri di gravità di alcune figure piane o solide e che trovansi nei trattati più elementari di Fisica.

§ 8. **Il principio della leva.** — Nel caso speciale di due sole forze parallele applicate agli estremi di una verga rigida, i risultati del § precedente ci dicono subito che la risultante si può pensare applicata in un punto che divide la verga in due parti inversamente proporzionali alle forze; internamente od esternamente secondo che sono dello stesso o di senso contrario.

Dette P e Q le intensità delle forze applicate in A e B (estremi della verga) ed R quella della risultante applicata in C, si ha

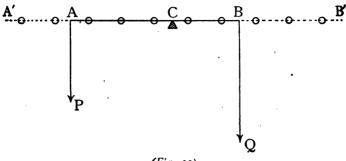
$$P : Q : R = CB : AC : AB.$$

Se quindi la verga è fissa in C *(fulcro)* abbiamo *una leva retta* in equilibrio e la R dicesi *pressione*

esercitata sul fulcro. Questo è il famoso principio della leva, base di tutta la Statica degli antichi greci.

Ammesso, come postulato o risultato sperimentale, che una leva retta a braccia eguali è in equilibrio quando le forze applicate agli estremi sono eguali e che in tal caso il fulcro risente una pressione parallela ed eguale al doppio delle forze; o in altre parole che due forze eguali e parallele fanno equilibrio ad una doppia, di senso contrario, agente a metà distanza; si può dimostrare *direttamente* il principio della leva e far poscia dipendere da questo la legge della composizione delle forze concorrenti. Così se il rapporto tra P e Q è commensurabile, p. es. $P:Q=2:3$, dico che l'equilibrio ha luogo se il fulcro C è tale che $AC:CB=3:2$ e che la pressione da esso sopportata è eguale a $P+Q$.

Dividasi AB in 5 parti eguali; AC e CB ne conterranno rispettivamente 3 e 2; prolunghiamo AB in A' e B', essendo $AA'=CB$ e $BB'=AC$; C sarà quindi il punto medio di $A'B'$; consideriamo i punti di mezzo delle parti eguali di AC, ecc. Alla forza P potremo sostituire quattro forze $\frac{1}{4}P$, e alla Q sei forze $\frac{1}{6}Q$ e quindi eguali alle precedenti e applicate nei punti di mezzo suddetti, situati simmetricamente rispetto A e B. Componendo poscia due a due le forze così ottenute simmetriche

rispetto C, otterremo la risultante applicata in C ed eguale alla somma di P e Q.

(*Fig. 22*)

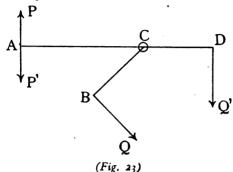
Col metodo solito di riduzione all'assurdo si passa agevolmente al caso delle forze incommensurabili.

Il caso della *leva angolare* può essere ricondotto a quello della leva retta, purchè si ammetta che una leva angolare a braccia eguali è in equilibrio quando le forze sono eguali e tendono a far girare la leva in senso contrario. Ciò posto consideriamo la leva angolare ACB colle forze P e Q; prolunghiamo AC in modo che $CD = CB$; consideriamo un'altra leva retta di braccia AC e CD e colle forze P' (opposta a P) e Q' e sia in equilibrio; immaginiamo ora saldate assieme le due leve; otterremo un sistema in equilibrio e poichè P e P' si elidono, dovrà essere in equilibrio la leva angolare a braccia eguali BCD; dunque

$Q = Q'$ e però

$$P : Q = CB : AC;$$

le due forze cioè debbono avere egual momento rispetto al punto C.

(Fig. 23)

Dal principio della leva è poi facile dedurre quello della composizione delle forze; sebbene non sembra sia stato conosciuto dagli antichi, che hanno sempre considerate le forze come grandezze scalari. Tale principio fu subito invece applicato alla ricerca delle condizioni di equilibrio di molte delle macchine semplici.

Le condizioni relative al piano inclinato furono dimostrate, in modo assai originale, da STEVIN.

Si consideri un triangolo con un lato AB orizzontale e posto in un piano verticale e intorno ai suoi lati avvolta una catena omogenea pesante: essa si mantiene in equilibrio, perchè se cominciasse a muoversi « *questo movimento non avrebbe fine, ciò*

che è assurdo». Ma la parte di catena che sta sotto AB è di per sè in equilibrio e può esser tolta; sono dunque in equilibrio le parti AC e CB; immaginandole riunite in due pesi si deduce che, per l'equilibrio, questi due pesi stanno tra loro come le lunghezze AC e CB.

Se poi il lato CB è verticale si deduce che su di un piano inclinato, la potenza (parallela al medesimo) sta al peso che essa sostiene in equilibrio, come l'altezza sta alla lunghezza del piano stesso.

Questa regola, com'è facile a vedersi, racchiude in sè già un caso particolare della legge del parallelogrammo *.

---

* Il principio della leva conosciuto, ma non esattamente dimostrato da ARISTOTELE, Op. Omnia, Paris, 1877; **4.** *Mechanica*, Cap. 2, è stato dimostrato da ARCHIMEDE: *De Aequiponderantibus*, Lib. I, Prop. VI e VII; e abbiamo appunto accennato la sua dimostrazione.

Si è tentato rimuovere il postulato su cui si fonda la dimostrazione da HUYGHENS, FOURIER: Œuvres, **2**, p. 510; LAGRANGE, *Méc. analy.*, Œuvres, **II**, p. 5. Su tutto l'argomento poi vedi i classici: *Éléments de Statique* di POINSOT, Cap. I; e per una esposizione critica: MACH, *La Mécanique. Exposé hist. et crit. de son dévelop.*, Paris (1904), Cap. I; VAILATI, *La dimostrazione del princ. d. leva data da* ARCHIMEDE, ecc. Bollett. Bibliogr. e Storia (1904).

La teoria dell'equilibrio su di un piano inclinato, contenuta in una compilazione latina di un libro di origine greca:

Esercizi.

1. Determinare la posizione di equilibrio di un punto soggetto a forze dirette a punti fissi e proporzionali alle distanze.

Si ha

$$\sum K_r(G - P_r) = 0,$$

essendo K_r un coefficiente di proporzionalità e P_r i punti di applicazione; di qui

$$G - O = \sum K_r(P_r - O) : \sum K_r,$$

la quale confrontata colla (7) s'interpreta subito.

2. Un punto A è soggetto a forze dirette a punti fissi A_r e rispettivamente eguali ad $(A_r - A)F_r$, in cui F_r $(r = 1, 2, \ldots)$ sono le intensità di forze parallele ciascuna applicata in A_r. Trovare la risultante.

De ponderibus di NEMORARIO, pubblicata da APIANO (1533) e poi tradotta e pubblicata dopo la morte di TARTAGLIA (1565), servì a STEVIN (1548-1620) per dedurre la condizione di equilibrio di tre forze concorrenti di cui due sono ortogonali, in un'opera pubblicata in olandese nel 1585 e poi tradotta in latino e stampata nel 1608 col titolo *Hypomnemata mathematica*. GALILEO pure assai semplicemente ha ridotto l'equilibrio su di un piano inclinato a quello della leva: *Le Mecaniche* (1593): Ediz. naz. **2**, pag. 181. Vedi l'articolo di VAILATI: *Il principio dei lavori virtuali*, ecc. [Atti Acc. Torino, **32** (1896-97)].

Anche del principio della leva sono state date dimostrazioni fondate sull'uso di equazioni funzionali: vedi la mem. di D. DE FONCENEX citata a pag. 173 e quella di FOURIER: Œuvres, **2**; p. 511.

Se F è la risultante; G il centro delle F_r, avremo

$$F = \sum F_r(A_r - A); \quad G - O = \sum F_r(A_r - O) : \sum F_r,$$

onde

$$F = (G - A) \sum F_r.$$

La risultante passa dunque per G ed ha per grandezza mod $(G - A) \sum F_r$.

3. Un punto A è soggetto a forze dirette a punti fissi $A_1, A_2, \ldots$, e inversamente proporzionali alle distanze. Trovare la risultante.

Si ha

$$F = \sum K_r (A_r - A) : \rho_r^2$$

dove ρ_r è la distanza di A_r da A.

Posto

$$\Phi = \log \Pi \, \rho_r^{K_r},$$

si vede subito che il vettore F ha per componenti le derivate di Φ rispetto alle coordinate di A.

4. Se più forze in un piano ammettono una risultante e si fanno girare tutte di uno stesso angolo intorno ai loro punti di applicazione, la risultante passerà per un punto fisso.

Basterà dimostrare il teorema per due sole forze girevoli intorno A e B; il punto d'incontro delle due forze C si sposta su di un cerchio e la risultante dovendo formare lo stesso angolo con AC passerà per un punto fisso del cerchio.

5. Ai quattro vertici A_1, A_2, A_3, A_4 di un tetraedro applicare quattro forze normali alle facce opposte in modo che si facciano equilibrio.

Le forze $F_1, F_2, \ldots$ essendo in equilibrio, proiettandole su F_1, F_2, ecc. si hanno delle relazioni analoghe alla

$$F_1 + F_2 \cos(F_1 F_2) + \ldots = 0,$$

cioè $$F_1 + F_2 \cos(A_3 A_4) + \ldots = 0, \text{ ecc.};$$
ma la stessa relazione ha luogo tra le aree delle facce; onde le forze debbono essere proporzionali alle aree delle facce opposte.

Con ciò è anche soddisfatta la condizione relativa ai momenti; infatti la somma dei momenti relativi allo spigolo $A_1 A_2$ è nulla perchè F_1, F_2 hanno momento nullo; F_3, F_4 hanno momenti di segno contrario e di più
$$\text{mom. } F_4 = \lambda . A_1 A_2 A_3 . r,$$
r essendo la minima distanza tra la normale $A_4 A'_4$, condotta da A_4 sulla faccia opposta, e $A_1 A_2$; cioè
$$\text{mom. } F_4 = 3 \lambda V \frac{r}{A_4 A'_4} = 3 \lambda V \operatorname{cotg} A_1 A_2;$$
lo stesso dicasi pel momento di F_3; ecc.

6. Si può trovare un sistema di sei forze equivalenti ad un sistema dato, agenti secondo sei rette scelte ad arbitrio purchè non appartenenti ad un complesso lineare.

Infatti se α_i, β_i, ..., ν_i sono le coordinate di una delle sei rette, avremo
$$R_x = \sum F_i \alpha_i; \ldots; M_x = \sum F_i \lambda_i; \ldots$$
dalle quali si possono ricavare le F_i purchè il determinante del sistema sia diverso da zero.

In particolare il sistema potrebbe ridursi ad una forza sola $F(\alpha, \beta, \ldots, \nu)$ e le sei rette date potrebbero essere i sei spigoli di un tetraedro; se accenniamo con 1, 2, 3 gli spigoli concorrenti in un vertice e con 4, 5, 6 quelli rispettivamente opposti si ha
$$[1, 4] F_1 = F(\alpha \lambda_4 + \ldots + \lambda \alpha_4 + \ldots); \text{ ecc.}$$

7. Trovare le condizioni perchè n forze agenti su n rette date si facciano equilibrio.

Dobbiamo avere

Inoltre

$$F_1 : F_2 : \ldots = \sqrt{[2, 3][2, 4][3, 4]} : , \ldots .$$

Per $n = 5$ le rette debbono avere le stesse trasversali e per $n = 6$ appartenere allo stesso complesso lineare. Queste condizioni poi sono anche sufficienti.

[MÖBIUS, *Lehrbuch der Statik,* (1837). Ges. Wer., **3**, § 102. SOMOFF, *Einleit. in die Statik u. Dynamik.* Leipzig, 1879. Kap. IV, p. 294. SCHELL, *Theor. d. Beweg. u. d. Kräfte,* **2**. Leipzig 1880, p. 32].

8. Dimostrare che il centro delle forze parallele ottenute prendendo le componenti delle forze di un sistema secondo una certa direzione, descrive un piano col variare della direzione (piano centrale).

Rispetto ad un sistema d'assi ortogonali porremo

$$A_1 = \sum X, \qquad A_2 = \sum Y, \qquad A_3 = \sum Z;$$
$$A_{11} = \sum x X, \quad A_{12} = \sum x Y, \quad A_{13} = \sum x Z; \text{ ecc.}$$

Le A_{ik} si dicono le coordinate astatiche del sistema.

Dette ξ, η, ζ le coordinate del centro delle forze parallele alla direzione α, β, γ, dalle (9) colle posizioni precedenti si trova

$$\alpha(A_1 \xi - A_{11}) + \beta(A_2 \xi - A_{12}) + \gamma(A_3 \xi - A_{13}) = 0,$$

e due analoghe; eliminando α, β, γ si ha appunto l'equazione d'un piano passante pel punto O_1 di coordinate $A_{11} : A_1$, $A_{21} : A_1$, $A_{31} : A_1$ che è il centro delle forze parallele ad x; e così passa per O_2 e O_3 centri delle componenti secondo y e z.

9. Un sistema di forze è in equilibrio: trovare le condizioni affinchè l'equilibrio non venga alterato quando, spostando il corpo, si lasciano

inalterati i punti di applicazione, le direzioni e le intensità delle forze.

Basterà considerare le rotazioni del corpo intorno ad un punto fisso; la terna x, y, z connessa col corpo assuma la posizione x_1, y_1, z_1. La forza F secondo x, y, z avrà sempre stesse componenti, mentre le coordinate del suo punto d'applicazione (Parte 1ª, pag. 73) saranno

$$x_1 = a_1 x + b_1 y + c_1 z; \text{ ecc.}$$

La condizione

$$\sum (y_1 Z - z_1 Y) = 0$$

diventa

$$(b_2 - c_3) A_{23} + a_2 A_{13} - a_3 A_{21} + c_2 A_{33} - b_3 A_{22} = 0,$$

in cui è da notare che $A_{ik} = A_{ki}$. Quindi [form. (14), pagina 76], posto

$$A = -(A_{22} + A_{33})\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu, \text{ ecc.}$$

otteniamo

$$A + \mu C - \nu B = 0$$

oppure $$A \operatorname{cotg} \omega - c B + b C = 0,$$

per le (19) della p. 79, e due analoghe. Il determinante di questo sistema, cioè

$$\operatorname{cotg} \omega (\operatorname{cotg}^2 \omega + 1),$$

è nullo per $2\omega = \pi$; in tal caso

$$A : B : C = a : b : c = K$$

e quindi

$$-(A_{22} + A_{33}) a + A_{12} b + A_{13} c = K a,$$

che è della forma

$$(A_{11} - K) a + A_{12} b + A_{13} c = 0,$$

e due analoghe. Si giunge a una equazione di 3° grado in K a radici tutte reali; ad ognuna corrisponde un asse di rotazione ed un'ampiezza di rotazione eguale a π; quindi *si hanno tre direzioni reali ed ortogonali intorno a cui ruotando il sistema di π, esso passa da una posizione di equilibrio in altre tre.*

Escluso il caso di $2\omega = \pi$, deve essere $A=B=C=0$; onde

$$-(A_{22}+A_{33})\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu = 0, \text{ ecc.}$$

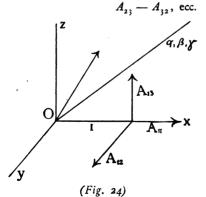
Se il determinante di tale sistema è nullo, veniamo ad individuare un altro asse *(asse di equilibrio)*, ma non l'ampiezza della rotazione; cioè l'equilibrio ha luogo qualunque sia la rotazione. Se tutte le A_{ik} sono nulle, ogni asse è di equilibrio; il corpo dicesi in *equilibrio astatico.*

[Cfr. BARDELLI, *Sugli assi di equilibrio.* In memor. D. CHELINI. Collec. mathematica, 1881].

10. Dimostrare che un sistema di forze si può sempre ridurre ad una forza risultante applicata in O e a tre coppie di braccio eguale ad uno, secondo gli assi, e di forze le cui componenti sono (A_{11}, A_{12}, A_{13}), ecc.

Basterà dimostrare che i momenti di queste tre coppie secondo gli assi sono gli stessi dei momenti del sistema, cioè

$$A_{23} - A_{32}, \text{ ecc.}$$

(Fig. 24)

Ora la coppia di braccio uno secondo x, ha per momenti secondo x, y, z, rispettivamente

$$0, \quad -A_{13}, \quad A_{12};$$

e le altre due:

$$A_{23}, \quad 0, \quad -A_{21};$$
$$-A_{32}, \quad A_{31}, \quad 0.$$

onde è vero, ecc. Abbiamo quindi una semplice interpretazione delle A_{ik}. Alle tre coppie precedenti se ne può sostituire una sola di braccio uno diretto secondo (α, β, γ) e le cui forze K hanno per

componenti

$$X = A_{11}\alpha + A_{21}\beta + A_{31}\gamma, \text{ ecc.}$$

Riportiamo sulla retta un segmento ρ tale che $K\rho = 1$; il suo estremo (x, y, z) descrive l'ellissoide

$$f = (A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z)^2 + \ldots = 1,$$

mentre

$$\rho X = A_{11}x + A_{21}y + A_{31}z, \text{ ecc.}$$

(ellissoide centrale relativo ad O). Possiamo ora mostrare che le forze K_1, K_2, K_3 corrispondenti alle coppie i cui bracci sono diretti secondo gli assi dell'ellissoide sono tra loro ortogonali.

Infatti le direzioni di questi assi sono determinate dalle

$$\frac{\partial f}{\partial x} \equiv x, \text{ ecc.}$$

quindi $\quad A_{11}X + A_{12}Y + A_{13}Z = kx$; ecc.

e se x', y', z', definiscono un altro asse, avremo

$$\rho' X' = A_{11}x' + A_{21}y' + A_{31}z'; \text{ ecc.}$$

Moltiplicando le prime per x', y', z' e sommando si deduce

$$XX' + YY' + ZZ' = 0.$$

Dunque gli assi di ellissoide e le direzioni delle forze formano due triedri retti; portati a coincidere, le forze delle coppie cadranno sul proprio braccio, le coppie si annulleranno ed il sistema si ridurrà ad una forza sola. Lo stesso poi accade facendo ruotare il sistema di π intorno x, y, z. Concludiamo:

Esistono quattro posizioni del corpo in cui le forze (nelle ipotesi dell'esercizio 9) ammettono una risultante unica passante per un punto fisso. Come caso particolare risulta il teorema dell'esercizio precedente.

[DARBOUX, *Mém. sur l'équilibre astatique*, etc. Mém. de la Société d. Sciences phys. et natur. de Bordeaux, **2** (1877). D. DA SILVA, *Memoria sobre a rotação das forças em torno*

dos pontos de applicação. Mem. Acad. de Lisboa, **3** (2), (1851). ROUTH, *Analytical Statics*, **2** (1892), Astatics, pag. 165].

11. Dimostrare che se un sistema di forze non è in equilibrio, si può sempre in infiniti modi equilibrare con due forze in modo che il nuovo sistema abbia un asse di equilibrio e che inoltre le due forze incontrino l'asse in due punti.

Dette F_1 e F_2 le due forze applicate in (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) si hanno i tre seguenti gruppi di equazioni

$$A_1 + X_1 + X_2 = 0 \text{ ; ecc.}$$

$$y_1 Z_1 + y_2 Z_2 + A_{23} = z_1 Y_1 + z_2 Y_2 + A_{32} = A'_{23} = A'_{32} \text{ ; ecc.}$$

$$-(A'_{22} + A'_{33})\alpha + A'_{12}\beta + A'_{13}\gamma = 0 \text{ ; ecc.}$$

in cui $A'_{11} = x_1 X_1 + x_2 X_2 + A_{11}$; ecc.;
colle incognite $X_1, \ldots ; X_2, \ldots, x_1, \ldots x_2, \ldots \alpha, \beta, \gamma$.
I punti $x_1, y_1, z_1, x_2, \ldots$ siano ora sull'asse le cui ulteriori coordinate diciamo λ, μ, ν. Dal secondo gruppo, moltiplicando per α, β, γ e sommando otteniamo

$$D = (A_{32} - A_{23})\alpha + (A_{13} - A_{31})\beta + (A_{21} - A_{12})\gamma$$
$$= A_1 \lambda + B_1 \mu + C_1 \nu.$$

Dal terzo gruppo invece, colle notazioni dell'esercizio 9, risulta

$$A = A_2 \nu - A_3 \mu \text{ ; ecc.}$$

Quindi

$$A A_1 + B B_1 + C C_1 = 0,$$

relazione di primo grado in α, β, γ: equazione di un piano passante per l'origine e su cui deve trovarsi l'asse di equilibrio. Inoltre è

$$A(A_2\gamma - A_3\beta) + \ldots + D(A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma) = 0,$$

equazione di un cono quadratico col vertice nell'origine. Gli assi richiesti sono due *(assi principali)*.

12. Si può sempre spostare il sistema rigido in modo che le A_{ik} siano tutte nulle eccetto A_{11}, A_{22}, A_3.

Si sposti il corpo in modo che la risultante (asse z) sia normale al piano centrale (esercizio 8); quindi $A_1 = A_2 = 0$, $A_{31} = A_{32} = A_{33} = 0$ e scelto O_3 per origine è pure

$$A_{13} = A_{23} = 0.$$

Le forze nel piano $x\,y$ si riducono ad una coppia di momento $A_{12} - A_{21}$; possiamo spostare le forze in modo che il momento sia nullo e quindi

$$A_{12} = A_{21}.$$

Girando ora gli assi di un angolo α, si può fare in modo che il nuovo A_{12} sia nullo cioè

$$\sum (-x \operatorname{sen}\alpha + y \cos\alpha)(X\cos\alpha + Y\operatorname{sen}\alpha) = 0,$$

donde

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{A_{11} - A_{22}}{A_{12}}.$$

13. Trovare l'espressione del momento scalare di un sistema di forze rispetto ad un dato piano.

Dal punto di applicazione di F si conduca la perpendicolare p sul piano

$$u\xi + v\eta + w\zeta - t = 0$$

(u, v, w, t coordinate omogenee del piano); il momento scalare $\mathfrak{M}$ del sistema essendo espresso da $\sum F p$, ha per componenti $\mathfrak{M}_x = \sum X p$, ecc.; ma

$$p\sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = u x + v y + w z - t,$$

onde:

$$\mathfrak{M}_x \sqrt{u^2 + v^2 + w^2} = A_{11} u + A_{21} v + A_{31} w - A_1 t; \text{ ecc.}$$

e in ultimo

$$\mathfrak{M}^2(u^2 + v^2 + w^2) = (A_{11} u + A_{21} v + A_{31} w - A_1 t)^2 + \ldots$$

14. Trovare l'inviluppo dei piani pei quali il momento scalare è costante.

Supponendo $\mathfrak{M}$ costante l'equazione precedente rappresenta in coordinate di piani l'equazione di una quadrica;

variando $\mathfrak{M}$ otteniamo un sistema di quadriche omofocali. Riferendoci del resto alle ipotesi dell'esercizio (12) abbiamo

$$\mathfrak{M}^2(u^2+v^2+w^2)=u^2A_{11}^2+v^2A_{22}^2+t^2A_3^2$$

ed in coordinate di punti

$$\frac{x^2}{\mathfrak{M}^2-A_{11}^2}+\frac{y^2}{\mathfrak{M}^2-A_{22}^2}+\frac{z^2}{\mathfrak{M}^2}=\frac{1}{A_3^2}.$$

15. Si può spostare il corpo in modo che nella nuova posizione il sistema ammetta una risultante unica?

Sia $R(a, b, c, l, m, n)$ la risultante e fermi restando i punti di applicazione, anzichè far ruotare il corpo, facciamo ruotare le forze, sicchè

$$X_1=a_1X+b_1Y+c_1Z\text{; ecc.}$$

e coll'ipotesi dell'esercizio 12 si ha

$$\sum X_1=c_1A_3\text{; ecc.}\qquad \sum(yZ_1-zY_1)=b_3A_{22}\text{; ecc.}$$

Quindi

$$Ra=c_1A_3,\qquad Rb=c_2A_3,\qquad Rc=c_3A_3$$
$$Rl=b_3A_{22},\qquad Rm=-a_3A_{11},\qquad Rn=a_2A_{11}-b_1A_{22};$$

notando che $lc_1+mc_2+nc_3=0$, dalle tre ultime si ricava

$$a_2A_{22}-b_1A_{11}=0;$$

e da questa e dalla sesta

$$a_2=RA_{11}n:(A_{11}^2-A_{22}^2),\qquad b_1=RA_{22}n:(A_{11}^2-A_{22}^2)$$

e di seguito

$$a_3=-Rm:A_{11},\qquad b_3=Rl:A_{22};$$

mentre le prime tre ci daranno c_1, c_2, c_3.

Ad ogni forza corrisponde una determinata posizione del corpo; ma la R potrà scegliersi ad arbitrio? Riflettendo che

$$a_2^2+a_3^2=b_1^2+c_1^2,\qquad a_2^2+c_2^2=b_1^2+b_3^2,$$

otteniamo

$$\frac{m^2}{A_{11}^2}+\frac{n^2}{A_{11}^2-A_{22}^2}-\frac{a^2}{A_3^2}=0,$$

$$\frac{l^2}{A_{22}^2} - \frac{n^2}{A_{11}^2 - A_{22}^2} - \frac{b^2}{A_3^2} = 0\,;$$

ognuna di queste rappresenta un complesso quadratico; la R deve quindi essere scelta nella congruenza da questi individuata. Il punto (y, z) in cui una retta di tale congruenza taglia il piano $y z$, essendo $m = a z$, $n = - a y$, giace sulla

$$\frac{y^2}{A_{11}^2 - A_{22}^2} + \frac{z^2}{A_{11}^2} - \frac{1}{A_3^2} = 0,$$

che è la conica focale, nel piano $y z$, del sistema di quadriche dell'esercizio 14. Così il punto in cui la stessa retta taglia il piano $x z$ giace sull'altra conica focale dello stesso sistema. Di qui si deduce, in particolare, il risultato dell'esercizio 10; basta pel punto fisso condurre le rette che si appoggiano alle due coniche focali.

[MINDING, CRELLE's Journal, **14**, **15** (1835-36). Bullet. de DARBOUX, **12** (1868). TAIT, *Traité élém. des Quaternions*, **2**. Paris (1884), p. 148].

16. Trovare, sempre nelle stesse ipotesi, i momenti del sistema di forze nella nuova posizione del corpo.

Le componenti dei primitivi momenti sono

$$L = A_{23} - A_{32}\,,\ \text{ecc.};$$

e quelli nella nuova posizione:

$$L_1 = a_2 A_{13} + b_2 A_{23} + c_2 A_{33} - (a_3 A_{12} + b_3 A_{22} + c_3 A_{32}).$$

Colle form. della pag. 76, ponendo

$$\alpha = A_{11} \lambda + A_{12} \mu + A_{13} \nu,\ \text{ecc.}$$

$$\delta = L\lambda + M\mu + N\nu + A, \qquad A = A_{11} + A_{22} + A_{33}\,,$$

risulta

$$\frac{1}{2} \rho^2 (L_1 - L) = \alpha + \mu\gamma - \nu\beta - \lambda\delta,\ \text{ecc.}$$

e in cui λ, μ, ν, ρ sono i parametri razionali [pag. 76, formule (13) e (14)].

17. Determinare l'asse e l'ampiezza della rota-

zione, colla quale il sistema acquista un momento dato.

Supponiamo noti $L, \ldots, L_1, \ldots$ e cerchiamo λ, μ, ν valendoci delle tre equazioni precedenti. Eliminiamo β e γ, moltiplicando per $1 + \lambda^2$, $\lambda\mu + \nu$, $\lambda\nu - \mu$ e sommando; avremo

$$\alpha - \lambda\delta = \frac{1}{2}[(1 + \lambda^2)(L_1 - L) + (\lambda\mu + \nu)(M_1 - M) + (\lambda\nu - \mu)(N_1 - N)]$$

e due analoghe. Ponendo per α, β, γ i loro valori e facendo

$$\varepsilon = \delta + \frac{1}{2}[(L_1 - L)\lambda + (M_1 - M)\mu + (N_1 - N)\nu]$$

avremo

$$[L + \frac{1}{2}(L_1 - L)]\lambda + \ldots + A - \varepsilon = 0$$

$$(A_{11} - \varepsilon)\lambda + [A_{12} + \frac{1}{2}(N_1 - N)]\mu + [A_{13} - \frac{1}{2}(M_1 - M)]\nu - \frac{1}{2}(L_1 - L) = 0$$

e due altre analoghe. Dalle quattro equazioni lineari in λ, μ, ν deduciamo un'equazione di 4^o grado in ε; risoluta questa troveremo i rapporti $\lambda : \mu : \nu$.

Alcuni casi particolari sono interessanti; se il sistema deve restare equivalente a sè stesso, $L_1 = L$, ecc. quindi

$$L\lambda + M\mu + N\nu + A - \varepsilon = 0$$
$$(A_{11} - \varepsilon)\lambda + A_{12}\mu + A_{13}\nu = 0, \text{ ecc.}$$

Dalle tre ultime risulta che ε è radice di una equazione cubica; ma non essendo $A_{ik} = A_{ki}$, essa non ha necessariamente tutte le radici reali. Dunque avremo al più tre assi di equivalenza.

Se poi risultasse $\varepsilon = A$, il momento è normale all'asse, e allora possono determinarsi due forze equivalenti al sistema ed agenti in due punti dell'asse (vedi eserciz. 11).

Supponendo nulla la risultante si può determinare una posizione in cui il sistema sia in equilibrio? Sappiamo già che

esistono quattro di queste posizioni. Essendo $L_1 = M_1 = N_1 = 0$ si vede subito (BALTZER, *Déterminants*, p. 175) che l'equazione in ε ha in tal caso tutte e quattro le radici reali. Determinato ε troveremo i quattro assi delle rotazioni colle quali il corpo si porta nelle quattro posizioni di equilibrio.

[SOMOFF, **2**, p. 390. SIACCI, *Le quaterne statiche nei sistemi di forma invariabile.* Mem. Soc. Italiana dei XL, **4** ser. 3. (1882)].

18. Comporre due diname.

Siano R_1, R_2 le due forze; k_1, k_2 i parametri delle diname cioè i rapporti delle forze ai momenti delle coppie e l'asse z sia normale alle due forze; l'asse della diname risultante incontra z ad angolo retto.

Sia R la forza, k il parametro; θ_1, θ_2, θ gli angoli che R_1, R_2, R formano con l'asse x; z_1, z_2, z le ordinate dei punti d'incontro; φ l'angolo delle due diname, δ la loro distanza; sicchè

$$\varphi = \theta_1 - \theta_2, \quad \delta = z_1 - z_2 .$$

Avremo

$$R_1 \cos\theta_1 + R_2 \cos\theta_2 = R \cos\theta$$
$$R_1 \operatorname{sen}\theta_1 + R_2 \operatorname{sen}\theta_2 = R \operatorname{sen}\theta,$$

donde

$$R_1 = R\frac{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta)}{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}, \quad R_2 = - R\frac{\operatorname{sen}(\theta_1 - \theta)}{\operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_1)}$$

$$R = R_1 \cos(\theta_1 - \theta) + R_2 \cos(\theta_2 - \theta).$$

Poscia dalle equazioni dei momenti:

$$- z_1 R_1 \operatorname{sen}\theta_1 - z_2 R_2 \operatorname{sen}\theta_2 + M_1 \cos\theta_1 + M_2 \cos\theta_2$$
$$= M \cos\theta - R z \operatorname{sen}\theta,$$
$$z_1 R_1 \cos\theta_1 + z_2 R_2 \cos\theta_2 + M_1 \operatorname{sen}\theta_1 + M_2 \operatorname{sen}\theta_2$$
$$= M \operatorname{sen}\theta + R z \cos\theta,$$

si ricava

$$(1) \quad \begin{cases} R z = R_1 [z_1 \cos(\theta_1 - \theta) + k_1 \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta)] \\ \qquad + R_2 [z_2 \cos(\theta_2 - \theta) + k_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta)] ; \end{cases}$$

e inoltre

$$M = \zeta_1 R_1 \operatorname{sen}(\theta - \theta_1) + \zeta_2 R_2 \operatorname{sen}(\theta - \theta_2)$$
$$+ M_1 \cos(\theta - \theta_1) + M_2 \cos(\theta - \theta_2);$$

e di qui

$$(2)\quad k R^2 = k_1 R_1^2 + k_2 R_2^2 + R_1 R_2 [(k_1 + k_2)\cos\varphi - \delta \operatorname{sen}\varphi]$$
$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 + 2 R_1 R_2 \cos\varphi.$$

Per dare una veste geometrica ai risultati precedenti, determiniamo una coppia d'assi x, y e due quantità a, b *(parametri principali)* tali che si abbia

$$\zeta_1 = (a - b) \operatorname{sen}\theta_1 \cos\theta_1 = \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{sen} 2\theta_1,$$

$$\zeta_2 = (a - b) \operatorname{sen}\theta_2 \cos\theta_2 = \frac{1}{2}(a - b) \operatorname{sen} 2\theta_2,$$

$$k_1 = a \operatorname{sen}^2\theta_1 + b\cos^2\theta_1 = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b)\cos 2\theta_1,$$

$$k_2 = a \operatorname{sen}^2\theta_2 + b\cos^2\theta_2 = \frac{1}{2}(a + b) - \frac{1}{2}(a - b)\cos 2\theta_2;$$

donde

$$\operatorname{tang}(\theta_1 + \theta_2) = (k_1 - k_2) : \delta; \text{ ecc.}$$

Sostituendo in (1), dopo alcune semplici trasformazioni di prodotti di seni e coseni in somme e differenze si trova

$$\zeta = (a - b) \operatorname{sen}\theta \cos\theta$$

e poichè, se x, y sono le coordinate di un punto qualunque della diname, si ha

$$\cos\theta = x : \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \operatorname{sen}\theta = y : \sqrt{x^2 + y^2},$$

risulta che ferme restando le direzioni, ma variando il rapporto di R_1 e R_2, tutte le diname stanno sul cilindroide (vedi pag. 103)

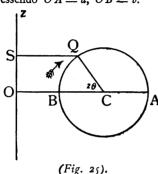
$$\zeta(x^2 + y^2) = (a - b) x y.$$

La diname risultante è dunque l'intersezione del cilindroide con un piano condotto per ζ parallelamente al vettore risultante di R_1, R_2. Quindi il cilindroide è per la composizione delle diname (o dei moti elicoidali) ciò che il parallelogrammo delle forze è per le forze concorrenti e per le coppie.

Facendo le stesse sostituzioni in (2) e trasformando i prodotti di seni e coseni si ha

$$k = a \operatorname{sen}^2 \theta + b \cos^2 \theta.$$

E si giunge quindi alla seguente costruzione; in un piano per z consideriamo un cerchio di diametro $AB = a - b$, essendo $OA = a$, $OB = b$.

(*Fig. 25*).

Il piano del cerchio ruota uniformemente intorno z, mentre un punto Q si muove sul cerchio pure in modo uniforme ma con velocità doppia; dopo un tempo t il piano ha percorso un angolo θ, ed il punto Q l'arco 2θ; la QS descrive il cilindroide e inoltre $QS = k$. L'asse z è una retta doppia; S descrive su z un segmento eguale al diametro del cerchio; ecc.

[R. S. Ball, *The Theory of Screws: a Geometrical Study of the Kinematics, Equilibrium and small Oscillations of a Rigid Body*. Trans. of the R. Irish Academy. **25**. Dublin (1871). Ivi è un bel modello del cilindroide; fa pure parte della collezione dei modelli matematici].

19. Trovare le formule che dànno la risultante di forze concorrenti e gli angoli che essa forma colle componenti.

Si ha, essendo x un asse qualunque,

$$R \cos(R x) = \sum F_s \cos(F_s x);$$

facendo coincidere x con R, con F_1, F_2, ... risulta

$$R \cos(R, F_1) = \sum F_s \cos(F_s, F_1); \text{ ecc.}$$

$$R = \sum F_s \cos(F_s, R);$$

e infine

$$R^2 = \sum F_r F_s \cos(F_r, F_s).$$

20. Se G è il centro delle forze parallele F_r applicate nei punti P_r, ed O una origine qualunque, si ha

$$\sum F_r (P_r - O)^2 = (G - O)^2 \sum F_r + \frac{\sum F_r F_s (P_r - P_s)^2}{\sum F_r}.$$

Quadrando infatti la (7) del § 7, ed aggiungendo a primo e secondo membro $\sum F_r F_s [(P_r - O)^2 + (P_s - O)^2]$ risulta subito la precedente. Se poi O coincide con G, il primo termine del secondo membro svanisce. Posto

$$\sum F_r (P_r - O)^2 = K^2 \sum F_r$$

nella ipotesi di ogni $F_r > 0$, si ha

$$K^2 = (G - O)^2 + \frac{\sum F_r F_s (P_r - P_s)^2}{(\sum F_r)^2}.$$

Quindi K raggiunge il suo valore minimo per $O = G$. Se K_1 è il valore relativo ad un altro polo,

$$K^2 - K_1^2 = (G - O)^2 - (G - O_1)^2,$$

cioè G trovasi nella intersezione di due sfere di centri O e O_1 e raggi K e K_1.

[LAGRANGE, Nouv. mém. de l'Acad. Royale de Berlin. (1783) Œuvres compl. **5** pag. 535].

21. I punti di due solidi si corrispondono in modo che

$$x = a + a_1 x_1 + b_1 y_1 + c_1 z_1, \text{ ecc.};$$

trovare le relazioni tra i loro centri di massa.

Poichè

$$dS = D\, dS_1,$$

essendo D il valore assoluto del determinante funzionale delle x e quindi costante, risulta subito dalle (10)

$$\xi = a + a_1 \xi_1 + b_1 \eta_1 + c_1 \zeta_1 , \text{ ecc.}$$

22. Trovare il centro di massa di un ottante di sfera e di ellissoide.

Per la simmetria si ha $\xi = \eta = \zeta$; detto a il raggio della sfera

$$\frac{1}{6} \pi a^3 \xi = \int x dx \int \int dy dz.$$

L'integrale doppio esprime l'area della quarta parte d'un cerchio di raggio $\sqrt{a^2 - x^2}$ e vale quindi $\frac{1}{4} \pi (a^2 - x^2)$; l'integrale rispetto x (tra o ed a) ha per valore $\frac{1}{16} \pi a^4$; onde

$$\xi = \eta = \zeta = \frac{3}{8} a.$$

Ponendo poscia

$$x = a x_1 , \qquad y = b y_1 , \qquad z = c z_1 ,$$

il punto x, y, z descrive un ottante di ellissoide se il corrispondente descrive quello d'una sfera di raggio uno; però per un ellissoide

$$\xi = \frac{3}{8} a , \qquad \eta = \frac{3}{8} b, \qquad \zeta = \frac{3}{8} c.$$

23. Centro di massa del volume compreso tra un paraboloide ed un piano normale all'asse.

Trovasi evidentemente sull'asse; se le due parabole principali sono

$$y^2 = 2 p x , \qquad z^2 = 2 q x ,$$

notando, come prima, che

$$\int dx \int dy dz = 2 \pi p q \int_0^a x dx = \pi p q a^2$$

$$\int \int \int x dx dy dz = \frac{2}{3} \pi p q a^3 ,$$

risulta

$$\xi = \frac{2}{3} a ;$$

dunque il centro di gravità coincide con quello della superficie del cono retto inscritto. Nel caso del paraboloide di rotazione si può dare di questa proprietà una dimostrazione elementarissima.

24. Lo stesso per il triangolo limitato dalla parabola

$$a y^{2n} = x^m$$

e dalla ascissa α e ordinata β.

Si trova senza alcuna difficoltà

$$(m + 4n)\xi = (m + 2n)\alpha; \qquad 2(m + n)\eta = (m + 2n)\beta.$$

Per $n = m = 1$, si ritrovano risultati notissimi.

[ARCHIMEDE, *De Aequiponderantibus*. Lib. 2. Prop. 8].

25. Lo stesso per l'area compresa tra la cissoide ed il suo assinto.

La cissoide, di equazione

$$(a - x) y^2 = x^3,$$

ha la seguente rappresentazione parametrica

$$x = a \cos^2 \varphi, \qquad y = a \cos^3 \varphi : \operatorname{sen} \varphi; \qquad 0 \leqq \varphi \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Quindi

$$\int x y \, dx = 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^6 \varphi \, d\varphi = \frac{5}{6} \cdot 2a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi,$$

$$\int y \, dx = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 \varphi \, d\varphi$$

e infine

$$\xi = \frac{5}{6} a.$$

26. Lo stesso per l'area compresa tra un intero ramo di cicloide e la sua base.

Da equazione di cicloide (pag. 15) deduciamo

$$x = a(\varphi - \operatorname{sen} \varphi), \qquad y = a(1 - \cos \varphi);$$

$$\int y\,dx = 8a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}^4 \varphi\, d\varphi;$$

quindi come prima

$$\eta = \frac{5}{6} a.$$

La distanza di G dal punto più elevato è $\frac{7}{6} a$.

27. Lo stesso per un arco di catenaria, e per un'area compresa tra l'arco, l'asse x e due ordinate.

Si ha (Cap. 3°, pag. 258)

$$y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a}, \qquad ds = \operatorname{Ch} \frac{x}{a} dx;$$

quindi per un arco si trova

$$\xi \int \operatorname{Ch} \frac{x}{a} dx = \int x \operatorname{Ch} \frac{x}{a} dx,$$

$$\eta \int \operatorname{Ch} \frac{x}{a} dx = a \int \operatorname{Ch}^2 \frac{x}{a} dx.$$

Per l'area si trova che

$$\xi_1 = \xi, \qquad 2\eta_1 = \eta.$$

L'origine dell'arco sia in A sull'asse y. Si ha

$$\xi = x - a \frac{\operatorname{Ch} \frac{x}{a} - 1}{\operatorname{Sh} \frac{x}{a}}$$

e poichè la tangente nell'estremo B è

$$Y - y = (X - x) \operatorname{Sh} \frac{x}{a},$$

ξ è l'ascissa di intersezione di due tangenti in A e B.

La normale in B incontra l'asse y in un punto di ascissa

$$Y = a \operatorname{Ch} \frac{x}{a} + \frac{x}{\operatorname{Sh} \frac{x}{a}};$$

ma

$$\int_0 \mathrm{Ch}^2 \frac{x}{a} dx = a \,\mathrm{Ch} \frac{x}{a} \mathrm{Sh} \frac{x}{a} - \int_0 \mathrm{Sh}^2 \frac{x}{a} dx$$

$$\int_0 \mathrm{Ch}^2 \frac{x}{a} dx = \frac{1}{2} \left(a \,\mathrm{Sh} \frac{x}{a} \mathrm{Ch} \frac{x}{a} + x \right);$$

quindi

$$\eta = \frac{1}{2} Y.$$

28. Un solido è terminato da facce piane e parallele e l'area di una qualunque sezione parallela intermedia è una funzione intera di secondo grado della distanza dalla base. Centro di massa.

Diciamo S_0 la base inferiore; S_1 quella superiore, S_2 quella mediana, S quella distante di z da S_0 e $2h$ l'altezza.

Sarà, per ipotesi,

$$S = a z^2 + b z + c$$

$$\text{Volume} = \int_0^{2h} (a z^2 + b z + c) dz = \frac{h}{3} (S_0 + S_1 + 4 S_2);$$

$$V\zeta = \int_0^{2h} (a z^2 + b z + c) z dz = \frac{2}{3} h^2 (S_1 + 2 S_2).$$

Se ζ_1 è la distanza del centro di massa dalla base superiore, si trae

$$\zeta : \zeta_1 = (S_1 + 2 S_2) : (S_0 + 2 S_2).$$

La regola precedente è applicabile a quadriche, tronchi di coni, piramidi, ecc. Così per un semiellissoide, notando che $S_1 = 0$, e che gli assi della ellissi sezione mediana sono $\frac{\sqrt{3}}{2} a$, $\frac{\sqrt{3}}{2} b$ e quindi

$$S_2 = \frac{3}{4} S_0,$$

risulta

$$\zeta : \zeta_1 = 3 : 5.$$

29. Teoremi di PAPPO o di GULDIN.

Sia σ un'area piana, x un asse del suo piano; l'ordinata η del centro di massa di σ è tale che

$$\eta\sigma = \int y\, dx\, dy = \frac{1}{2}\int y^2\, dx.$$

Dicasi V il volume generato da σ ruotando intorno a x, p. es. di 360°; avremo

$$V = \pi \int y^2\, dx,$$

onde: $$V = 2\pi\eta . \sigma;$$

cioè il volume è dato dall'area per la circonferenza descritta dal centro di massa.

Sia s un arco di curva piana, x un asse del suo piano, η l'ordinata del suo centro di massa, A l'area descritta da s ruotando intorno x. Avremo

$$\eta . s = \int y\, ds,$$

$$A = 2\pi \int y\, ds,$$

onde $$A = 2\pi\eta . s.$$

[PAPPO, *Collez. matem.* Pref. Lib. VII; ediz. Hultsch (1876-1878), pag 634. GULDIN, *Centrobaryca.* Lib. II, Cap. 8, Prop. 3. Viennae 1640].

30. Dicesi viriale di un sistema di forze rispetto ad un punto O la somma dei prodotti scalari delle forze per i vettori che da O vanno ai loro rispettivi punti di applicazione. Dimostrare che il viriale conserva lo stesso valore per tutti i punti di un piano normale alla forza risultante.

Posto

$$V = \sum (F_r - P_r)|(P_r - O) = \sum (Xx + Yy + Zz),$$

risulta

$$V' = V + (O - O')|(R - O);$$

quindi $V' = V$ se O' è sul piano condotto da O normale ad R.

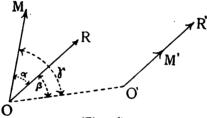
Detto V_0 il viriale relativo ad O, i punti O' per cui il viriale è nullo sono tali che

$$(O' - O)|(R - O) = V_0$$

e quindi sono su di un piano normale alla forza risultante e che su questa taglia un segmento eguale a $V_0 : R$.

Sia O' l'intersezione di questo piano coll'asse centrale.

Si ha [pag. 17, form. (26)]

$$M - O = M' - O' + |(O' - O)(R - O),$$

(Fig. 26).

cioè $$M - O = k(R - O) + |(O - O)(R - O),$$

donde $$(M - O)|(R - O) = k(R - O)^2$$

$$k = \frac{\overline{OM}}{\overline{OR}} \cos \alpha$$

$$(M - O)|(O' - O) = k\, V_0$$

e poichè $$V_0 = \overline{OR} \,.\, \overline{OO'} \cos \beta$$

risulta $$\cos \gamma = \cos \alpha \cos \beta\,;$$

il piano MOR è normale al piano ROO'.

Il viriale del sistema relativo ad un punto qualunque O è eguale a quello dell'unica forza R' applicata in O'.

Se il sistema è riducibile ad una coppia, $V' = V$, cioè il viriale è costante per ogni punto dello spazio.

[La considerazione del viriale è dovuta a Möbius, l. c.; il nome è di Clausius (1870). Cfr. Schell, loc. cit. **2**, pagina 273; Cerruti, Rend. Acc. Lincei (1876)].

CAPITOLO SECONDO.

IL PRINCIPIO DEI LAVORI VIRTUALI.

Il problema generale della Statica è la ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un sistema di corpi soggetti a determinate forze. Il principio che ora esponiamo, il più fondamentale della Statica, permette di risolvere un tal problema, perchè:

1° raggruppa in un solo enunciato le svariate condizioni di equilibrio dei sistemi materiali;

2° permette di poter dedurre le equazioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio con un procedimento semplice ed uniforme.

§ 1. **Spostamento virtuale.**—Se un punto P di un sistema materiale può assumere lo spostamento infinitesimo PP', pensato anche come semplicemente possibile, si dice che può ricevere uno spostamento *virtuale* o *facoltativo*. Se poi tale spostamento può aver luogo anche in senso opposto PP'', dicesi *invertibile;* altrimenti *non invertibile.*

Un punto libero può assumere qualunque spostamento invertibile; un punto posto sulla superficie limite di un corpo solido, impenetrabile, assume spostamenti invertibili sul piano tangente ed essendo infinitamente piccoli, non cessa, per questi, di restare sulla superficie; se invece si sposta verso lo spazio esterno al corpo, assume spostamenti non invertibili; per questi il punto si allontana dalla superficie.

L'estremo *P* di un filo flessibile ma inestendibile, fissato nell'altro estremo *O*, può assumere spostamenti invertibili sul piano tangente alla sfera di centro *O*; sono anche possibili spostamenti che avvicinano *P* ad *O*; ma questi, per la inestendibilità del filo, non sono invertibili.

Se un punto è obbligato a restare nell'interno dello spazio limitato da tre semirette *a*, *b*, *c*, uscenti da *O*, può assumere qualunque spostamento invertibile; ma se cade sul piano *bc*, saranno invertibili solo quelli contenuti nel piano; gli altri che portano il punto verso l'interno dello spazio non sono invertibili. Se cade su *a* saranno invertibili solo quelli effettuati lungo *a*; e finalmente se cade in *O*, *nessuno* dei possibili spostamenti è invertibile.

Se un corpo rigido è libero o ha un punto o un asse fisso, i suoi punti possono assumere qualunque spostamento invertibile.

Se è a contatto, p. es., in un sol punto, con una

parete fissa, le rotazioni del corpo intorno ad assi s passanti pel punto di contatto e le traslazioni lungo il piano tangente dànno luogo a spostamenti invertibili; mentre le traslazioni lungo s dànno luogo a spostamenti non invertibili.

Se un corpo è obbligato a restare a contatto con sei altri o con uno stesso corpo in sei punti, riflettendo che il moto è completamente individuato dal fatto che cinque punti sono obbligati a muoversi su cinque date superficie; in uno spostamento del sistema potrà avvenire che il sesto punto si muoverà a contatto colla sesta, oppur no. In quest'ultimo caso, qualunque spostamento del corpo non è invertibile; il primo caso poi avverrà certamente se il contatto ha luogo con un piano, con una sfera o con una superficie di rotazione.

In tutti questi, e in casi analoghi, diremo che il punto, il corpo o il sistema è libero o vincolato.

Un sistema vincolato può dunque assumere spostamenti parte invertibili e parte no; i primi non alterano i legami o i vincoli del sistema; non così i secondi. Si dice brevemente:

Gli spostamenti invertibili virtuali sono conciliabili coi vincoli del sistema; quelli non invertibili non lo sono.

§ 2. **Sistemi olonomi ed anolonomi.**—Accenneremo con δP lo spostamento virtuale di un punto e, generalmente, con δx, δy, δz le sue componenti

ortogonali. I vincoli del sistema limitando la mobilità di questo, avverrà, in generale, che gli spostamenti invertibili dei varii punti sono determinati quando siano fissati quelli di alcuni altri, oppure gl'incrementi (che potremo ancora chiamare spostamenti) di certi parametri atti a fissare la posizione del sistema; avverrà cioè che alcuni degli spostamenti invertibili sono funzioni di altri spostamenti.

Trattandosi poi di quantità infinitamente piccole, annullantesi contemporaneamente, queste funzioni sono lineari ed omogenee; oppure conterranno, linearmente ed omogeneamente, altre indeterminate arbitrarie; eliminando le quali, in tutti i modi possibili, otterremo ancora delle relazioni lineari ed omogenee tra gli spostamenti dei punti del sistema. Dunque, in generale:

Gli spostamenti virtuali invertibili dei punti di un sistema vincolato, soddisfano ad un sistema di relazioni lineari ed omogenee della forma

$$\sum (A\delta x + B\delta y + C\delta z) = 0, \tag{1}$$

in cui $\delta x, \ldots$ potranno anche, eventualmente, rappresentare spostamenti di altri parametri.

Per lo meno noi ci limitiamo a considerare sistemi di spostamenti invertibili traducibili in equazioni come (1).

La (1) resta anche soddisfatta cambiando il segno a δx, δy, δz; dunque:

Se un sistema di spostamenti virtuali soddisfa la (1), *esso è invertibile.*

Gli spostamenti virtuali non invertibili renderanno quindi il primo membro delle (1) diverso da zero; cioè possiamo dire:

I primi membri delle (1) *relative a spostamenti virtuali di un sistema vincolato sono eguali o diversi da zero, secondo che gli spostamenti sono invertibili o no.*

Le (1) poi riguardate come un sistema di equazioni ai differenziali totali possono essere integrabili (illimitatamente) oppure no; nel primo caso i vincoli sono espressi da equazioni finite tra le coordinate (*equazioni dei vincoli*) e perciò appunto il sistema fu chiamato *olonomo* *; nell'altro caso si dice *anolonomo*.

Un punto obbligato a restare su di una superficie di equazione $f = 0$; o su di una curva di equazioni $f = 0$, $\varphi = 0$; due punti collegati da un'asta rigida e tali quindi che

$$(x_1 - x_2)^2 + \cdots - l^2 = 0;$$

sono esempii semplicissimi di sistemi olonomi, nei quali è subito trovata l'equazione finita del corrispondente vincolo.

Una stessa equazione può corrispondere a condizioni fisiche assai diverse: p. es., l'equazione

* HERTZ, *Prinzipien der Mechanik*, u. s. w. 1894.

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0$$

può esprimere che il punto x, y, z deve trovarsi su di una sfera limite di un corpo solido o di una cavità sferica, o che è l'estremo libero di un filo teso e fissato nell'origine.

In un sistema olonomo è facile trovare il sistema (1) cui soddisfano gli spostamenti invertibili o il sistema di disuguaglianze degli spostamenti non invertibili.

Sia infatti $\mathfrak{F} = 0$ l'equazione di un vincolo che contiene le coordinate x_r, y_r, z_r di un certo numero di punti del sistema; poichè gli spostamenti virtuali invertibili non alterano i vincoli del sistema, le coordinate $x_r + \delta x_r, \ldots$ dovranno ancora soddisfare la $\mathfrak{F} = 0$; di guisa che avremo

$$\mathfrak{F}(\ldots\, x_r + \delta x_r,\, \ldots) = 0;$$

sviluppando in serie

$$\mathfrak{F}(\ldots\, x_r,\, y_r,\, z_r\, \ldots) + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_r}\delta x_r + \cdots = 0,$$

e trascurando i quadrati, i prodotti delle $\delta x, \ldots$ si ha, conforme alla (1),

$$\sum \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x_r}\delta x_r + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y_r}\delta y_r + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z_r}\delta z_r \right) = 0,$$

in cui la sommatoria va estesa a tutti i punti le cui coordinate figurano nella $\mathfrak{F} = 0$.

Questa relazione poi può dedursi direttamente dalla equazione del vincolo, poichè equivale semplicemente alla

$$\delta \mathfrak{J} = 0.$$

Con un ragionamento analogo si proverebbe che per gli spostamenti non invertibili deve essere

$$\delta \mathfrak{J} \leqq 0.$$

Si può anche dire che in un sistema olonomo ci sono da soddisfare equazioni della forma $\mathfrak{J}=0$ (vincoli *bilaterali*), e disuguaglianze $\mathfrak{J} \leqq 0$ (vincoli *unilaterali*).

Così p. es., se un punto sta sulla superficie di una sfera solida impenetrabile

$$x^2 + y^2 + z^2 - l^2 = 0,$$

considerando che il prodotto scalare di OP (direzione della normale) per lo spostamento PP' è nullo o positivo secondo che lo spostamento è invertibile o no, avremo che nell'uno o nell'altro caso si ha

$$x \delta x + y \delta y + z \delta z \geqq 0;$$

mentre che se il punto è l'estremo libero di un filo fisso in O; oppure deve giacere sulla superficie interna di una cavità sferica, avremo

$$x \delta x + y \delta y + z \delta z \leqq 0.$$

Diamo ora un esempio semplice di sistema anolonomo; e consideriamo una sfera di raggio a, obbligata a restare a contatto con un piano fisso, p. es., $\xi \eta$, e la ζ sia positiva dalla parte della sfera. Sia A l'attuale punto di contatto; la velocità di A secondo la normale alla sfera è nulla. Se poi supponiamo sia nulla la velocità di A lungo il piano (cioè che non abbia luogo nessuno scivolamento)

si dice che la sfera può rotolare, senza strisciare, sul piano. Il moto istantaneo della sfera si riduce ad una rotazione istantanea intorno ad un asse passante per A. Pel centro $O(\xi, \eta, a)$ della sfera consideriamo una terna x_1, y_1, z_1 parallela a quella fissa ed una terna x, y, z rigidamente connessa con la sfera e fissata rispetto alla prima dai quattro parametri $\alpha, \ldots \delta$, oppure dagli angoli φ, ϑ, ψ (pag. 74).

Rispetto agli assi fissi avremo, essendo p_1, q_1, r_1, le componenti della velocità istantanea,

$$\dot{\xi} + q_1 z_1 - r_1 y_1 = 0, \quad \dot{\eta} + r_1 x_1 - p_1 z_1 = 0$$
$$p_1 y_1 - q_1 x_1 = 0;$$

quindi pel punto $A(0, 0, -a)$ avremo

$$\dot{\xi} - a q_1 = 0, \quad \dot{\eta} + a p_1 = 0.$$

Per le (15) della pag. 133 deduciamo che, per uno spostamento virtuale compatibile coll'imposto vincolo, si ha

$$\delta \xi - a \operatorname{sen} \psi \, \delta \vartheta + a \operatorname{sen} \vartheta \cos \psi \, \delta \psi = 0$$
$$\delta \eta + a \cos \psi \, \delta \vartheta + a \operatorname{sen} \vartheta \operatorname{sen} \psi \, \delta \psi = 0,$$

mentre ζ è costante. Tra gli spostamenti dei cinque parametri che individuano la posizione della sfera sussistono due relazioni lineari e omogenee, ma non integrabili; il sistema è anolonomo. Lo stesso potrebbe dirsi per due superficie qualunque che rotolano l'una sull'altra senza strisciare *.

---

* APPELL, *Les mouvements de roulement en Dynamique.* Coll. Scientia. **4**, pag. 38.

§ 3. **Lavoro virtuale di una forza o di un sistema di forze.**—Dicesi lavoro virtuale di una forza PF, rispetto ad uno spostamento virtuale δP del suo punto d'applicazione, *il prodotto scalare del vettore F della forza e dello spostamento.* Tal lavoro è quindi espresso dal prodotto della forza per la proiezione dello spostamento sulla direzione della forza. A seconda che forza e spostamento formano un angolo acuto, retto, ottuso il lavoro virtuale è positivo, nullo, negativo.

La proprietà distributiva dei prodotti scalari ci dà subito i due seguenti teoremi:

La somma dei lavori di più forze (spostamenti) concorrenti, rispetto ad uno stesso spostamento (forza) è eguale al lavoro della forza (spostamento) risultante.

Se X, Y, Z sono le componenti ortogonali di F, abbiamo

$$\text{lav. } PF = F|\delta P = X\delta x + Y\delta y + Z\delta z;$$

come è poi chiaro dal fatto che F è la risultante di X, Y, Z i cui lavori sono $X\delta x$, ...

Consideriamo un sistema comunque vincolato e per uno spostamento virtuale dei punti del sistema facciamo la somma dei lavori virtuali delle forze ad essi applicate; otteniamo ciò che chiamasi lavoro virtuale del sistema S di forze; cioè

$$\text{lav. } S = \sum F|\delta P = \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z).$$

Esso, come ciascuno dei suoi termini, può essere positivo, nullo, negativo.

§ 4. **Principio dei lavori virtuali.** — *La condizione necessaria e sufficiente per l'equilibrio di un qualunque sistema materiale, è che il lavoro virtuale delle forze che sollecitano il sistema sia nullo per gli spostamenti invertibili e negativo per quelli non invertibili.*

a) Cominciamo a considerare il caso di un punto solo; e sia anzitutto libero. Se è in equilibrio, la risultante delle forze che lo sollecitano deve essere nulla ed è quindi nullo il suo lavoro virtuale per qualsivoglia spostamento. È dunque anche nullo il lavoro virtuale del sistema di forze che sollecita il punto. Reciprocamente, se tale lavoro è nullo per qualsivoglia spostamento, è nullo il lavoro della risultante ed il punto è in equilibrio.

Il punto sia vincolato; p. es., sia adagiato sulla superficie di un corpo solido; F sia la risultante delle forze.

La superficie esercita sul punto una certa azione: ammetteremo che tale azione sia rappresentabile da una forza N applicata al punto e diretta verso l'esterno del corpo *(Principio o postulato delle pressioni vincolari)* e se la N è inoltre normale alla superficie, diremo che non vi ha attrito. Questa reazione può completamente sostituire il vincolo e, per la sua aggiunta, potremo riguardare libero il

punto. In tale ipotesi e per ciò che è stato detto prima,

$$\text{lav. } F + \text{lav. } N = 0$$

per qualsivoglia spostamento del punto. Ma è

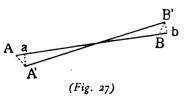
$$\text{lav. } N \geqq 0$$

rispettivamente per gli spostamenti invertibili e non invertibili; onde, per gli stessi, sarà

$$\text{lav. } F \leqq 0.$$

Reciprocamente, se questa condizione è soddisfatta, la F non solo è normale alla superficie, ma è diretta verso l'interno del corpo; il punto è in equilibrio.

b) Consideriamo ora un corpo rigido; e supponiamo sia costituito di due soli punti A e B che, uniti mercè una sottile asta rigida, si conservino a distanza invariabile.

Per seguire un procedimento uniforme, immagineremo sostituita l'asta con due forze N ed N', eguali e contrarie; una applicata in A rappresenta l'azione di A su B; l'altra in B, rappresenta quella di B su A (eguaglianza dell'azione e della reazione). In uno spostamento virtuale, l'asta dalla posizione AB passi alla $A'B' = AB$; si proiettino A' e B' in a e b sulla AB; avremo

(*Fig. 27*)

$$AB = A'B' = ab$$

onde $Aa = Bb$.

Inoltre in A sia applicata una forza F; per l'azione di F e di N, A è libero ed in equilibrio; quindi

$$\text{lav.}\, F + \text{lav.}\, N = 0;$$

lo stesso dicasi per B, cioè

$$\text{lav.}\, F' + \text{lav.}\, N' = 0.$$

Ma

$$\text{lav.}\, N = N \,.\, Aa, \quad \text{lav.}\, N' = -N \,.\, Bb;$$

quindi sommando

$$\text{lav.}\, F + \text{lav.}\, F' = 0.$$

Reciprocamente, se tale condizione è soddisfatta, qualunque siano gli spostamenti, fissando il punto B sarà

$$\text{lav.}\, F = 0$$

quindi F è normale ad AA', cioè ha la direzione di AB; e così dicasi per F'; inoltre $F = -F'$ e le due forze si fanno equilibrio.

Supponendo il sistema costituito da tre, quattro, ecc., punti rigidamente connessi tra loro due a due, si può, volta a volta, applicare lo stesso ragionamento; quindi si conclude che se un sistema rigido è in equilibrio il lavoro virtuale delle forze che lo sollecitano è nullo per qualsivoglia spostamento.

La stessa conclusione ha luogo se il sistema ha uno o due punti fissi. Sia O uno di questi;

applichiamo in O una forza N opposta alla reazione tra il punto e il corpo. Il sistema rigido potrà, dopo ciò, riguardarsi come libero; ma il lavoro della reazione, essendo O fisso, è nullo; dunque sarà nullo il lavoro delle forze direttamente applicate.

Supponiamo ancora il corpo rigido sia a contatto con una parete fissa; se il corpo è obbligato a scivolare (senza attrito) su quella parete, noi possiamo immaginarla soppressa, purchè in uno dei punti di contatto, p. es. A, si applichi una forza N, diretta all'esterno della parete (e nell'interno del corpo C) e normale a questa. Potremo quindi supporre libero il corpo C che resterà ancora in equilibrio se lo era prima. Se S è il sistema di forze che lo sollecita, avremo, *per qualsivoglia spostamento virtuale* del sistema

$$\text{lav.}\, S + \text{lav.}\, N = 0.$$

Ma per tutti gli spostamenti invertibili (rotazioni intorno ad assi uscenti da A e traslazioni lungo il piano tangente) lav. $N = 0$, e per quelli non invertibili (traslazioni dalla parte esterna alla parete) lav. $N > 0$; dunque nel caso dell'equilibrio sarà

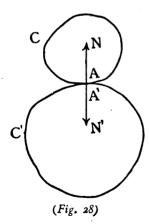
$$\text{lav.}\, S \overline{\lessdot}\, 0,$$

se si tratta di spostamenti invertibili o no.

Notiamo poi (per alcune conseguenze importanti in Dinamica) che se il corpo C fosse soltanto obbligato a rotolare sulla parete fissa, la reazione N non sarebbe necessariamente normale al corpo,

pur essendo sempre applicata in *A*. Ma essendo in tal caso nulla la velocità di *A*, il lavoro di *N* è nullo *per ogni spostamento invertibile* e quindi lo stesso accadrà per lav. *S*.

Dunque se un corpo rigido libero o vincolato (nei modi descritti) è in equilibrio, il lavoro delle forze che lo sollecitano direttamente è nullo per gli spostamenti virtuali invertibili, negativo per quelli non invertibili.

c) Passiamo ora a considerare il sistema di due corpi rigidi *C* e *C'* a contatto tra loro; ed anzitutto supponiamo siano sempre a contatto in *A*. Potremo, come al solito, supporre liberi *C* e *C'* considerando le due reazioni *N* ed *N'* opposte; allora essendo *C* e *C'* liberi ed in equilibrio, per qualunque spostamento virtuale avremo:

(*Fig. 28*)

$$\text{lav. } S + \text{lav. } N = 0$$
$$\text{lav. } S' + \text{lav. } N' = 0.$$

Ma *A*, per ipotesi, è sempre sovrapposto a sè stesso in ogni spostamento invertibile e quindi sarà

$$\text{lav. } N + \text{lav. } N' = 0;$$

onde

$$\text{lav. } S + \text{lav. } S' = 0,$$

mentre per ogni altro, non invertibile, sarà

$$\text{lav.}\, S + \text{lav.}\, S' < 0.$$

Supponiamo invece che i due corpi possano scivolare l'uno sull'altro; sia V la velocità di A, V' quella di A', punto di C' attualmente a contatto con A; e che è poi la velocità relativa di A rispetto al corpo C'. La velocità di strascinamento è contenuta nel piano tangente; quindi essendo il vettore V la risultante di V' e della velocità di strascinamento, le componenti di V e di V' sulla normale sono eguali. Lo stesso naturalmente varrà per gli spostamenti virtuali di A e di A', che sono eguali alle velocità suddette moltiplicate per l'elemento del tempo; cioè le componenti normali degli spostamenti di A e A' sono eguali e quindi

$$\text{lav.}\, N + \text{lav.}\, N' = 0;$$

mentre per ogni spostamento non invertibile, pel quale C viene allontanato da C', sarà

$$\text{lav.}\, N + \text{lav.}\, N' > 0.$$

Quindi, nei due casi,

$$\text{lav.}\, S + \text{lav.}\, S' \overline{<} 0.$$

Notiamo ancor qui che se i due corpi fossero solamente obbligati a rotolare, senza strisciare, l'uno sull'altro, le reazioni N, N' sempre opposte non agirebbero più, necessariamente, secondo la normale comune. Ma in tal caso è nulla la velocità di strascinamento e quindi $V = V'$; però per ogni spostamento invertibile, essendo sempre

lav. $N +$ lav. $N' = 0$, sarà

$$\text{lav. } S + \text{lav. } S' = 0.$$

d) Continuando in questa guisa si riesce a dimostrare che in ogni sistema in equilibrio, costituito da corpi rigidi con o senza punti od assi fissi, appoggiati tra loro o a pareti fisse sulle quali possono scivolare o rotolare, ecc. il lavoro virtuale delle forze del sistema è nullo per gli spostamenti invertibili, negativo per quelli non invertibili.

Dimostriamo ora la reciproca; e sia, in un sistema siffatto,

$$\text{lav. } S \leqq 0;$$

senza che sussista l'equilibrio; il sistema assumerà un certo movimento compatibile coi vincoli a cui è soggetto.

Immaginiamo impresso ai varii punti del sistema uno spostamento virtuale nel senso in cui avviene il movimento; il quale, per ogni punto, non potrà essere prodotto che dalla risultante delle forze direttamente applicate e di quelle dovute alle pressioni vincolari; sia S_1 il sistema di queste; avremo intanto

$$\text{lav. } S + \text{lav. } S_1 > 0.$$

Ma se quello spostamento è invertibile, per ciò che si è detto,

$$\text{lav. } S_1 = 0$$

onde

$$\text{lav. } S > 0$$

e ciò è assurdo perchè per gli spostamenti invertibili lav. $S = 0$; se poi quello spostamento non è invertibile essendo

$$\text{lav. } S < 0,$$

sarà

$$\text{lav. } S_1 > 0$$

cioè le varie pressioni vincolari debbono essere tutte positive.

La dimostrazione data non considerando che speciali sistemi materiali non può certamente ritenersi per assolutamente generale.

Tuttavia siccome, come ora vedremo, il principio esposto si presta assai bene alla ricerca delle condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio di un sistema, così esso si suole applicare, ammesso come *postulato* o *principio generale,* anche a tutti quei casi in cui, a rigore, non è applicabile la dimostrazione precedente; salvo poi, con altro procedimento, a verificare se le condizioni trovate con tal mezzo assicurano l'equilibrio.

Tale principio poi conduce alla seguente conseguenza, che in alcuni casi speciali abbiamo giustificata: *il lavoro virtuale delle reazioni dei vincoli (pressioni vincolari) è nullo o positivo secondo che gli spostamenti sono invertibili o no* *.

* Il principio dei lavori o delle velocità virtuali, le cui prime traccie si riscontrano negli scritti di ARISTOTELE e di ERONE [vedi: VAILATI, *Il principio dei l. v. da* Aris. *ad* Er.

§ 5. Equazioni generali dell'equilibrio di un sistema, ricavate dal principio dei lavori virtuali.

a) Se gli spostamenti dei varii punti del sistema si esprimono mediante altri spostamenti di parametri arbitrarii, cioè se

$$\delta x = a_1 \delta q_1 + a_2 \delta q_2 + \cdots,$$

allora, poichè per gli spostamenti invertibili deve essere,

$$(1) \qquad \sum (X \delta x + Y \delta y + Z \delta z) = 0,$$

fatte le sostituzioni, la (1) si trasformerà nella

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \cdots = 0;$$

Atti R. Acc. Torino, **32** (1896-97), p. 940]; in quelli di GALILEO che lo riconobbe in quasi tutte le macchine semplici, Ediz. Naz. **2**. *Le Mecaniche;* di DESCARTES, ecc., fu enunciato senza dimostrazione da GIOVANNI BERNOULLI (1717) in una lettera a VARIGNON, che nell'opera già citata (a pag. 166), **2**, sez. **9**, pag. 174-223 lo dimostrò e verificò nei casi più semplici.

Posto a fondamento della Meccanica analitica da LAGRANGE ed ammesso come postulato (1788), fu dimostrato da FOURIER, *Mém. sur la statique contenant la démonstration du principe des vitesses virtuelles.* J. de l'Éc. Polytech., **5** (1798); Œuvres, **2**, p. 477; e la sua dimostrazione classica, con qualche lieve modificazione, abbiamo riprodotto. Anche a FOURIER è dovuta la considerazione degli spostamenti non invertibili e quindi (salvo un cambiamento di segno) l'enunciato generale come al § 4.

LAGRANGE, che nella successiva edizione della *Méc. analyt.* (1811) e poi nel *Traité des fonc. analyt.* (1813) ha date due dimostrazioni del principio, non ha tenuto conto degli spostamenti non invertibili.

quindi per l'arbitrarietà delle δq_1, δq_2, ... risulteranno le equazioni necessarie di equilibrio

$$(2) \qquad Q_1 = Q_2 = \cdots = 0.$$

b) Ma, nel caso più generale, supponiamo che gli spostamenti invertibili del sistema materiale, soddisfino ad un certo numero di equazioni lineari ed omogenee

$$(3) \qquad \sum (A_i \delta x + B_i \delta y + C_i \delta z) = 0.$$

Però le δx, δy, δz dei varii punti non sono tutte arbitrarie; e si potranno invece dividere tutti gli spostamenti in un gruppo di arbitrarii; e in

---

Le idee di FOURIER furono riprese da A. COURNOT, *Extension du principe des vitesses virtuelles au cas où les conditions des liaisons du système sont exprimées par des inégalités.* Bull. de Férussac., **8** (1827); alle stesse giunse GAUSS, *Gesamm. Werke,* **5**, p. 35, nel 1829 e in una lettera a MÖBIUS nel 1837; è GAUSS che ha proposto il nome di *spostamenti facoltativi.* Vedi anche in proposito una memoria di OSTROGRADSKY: *Considérations générales sur les momens des forces* (1834), Mém. de l'Ac. de St. Pétersbourg, **1** (6), (1838), p. 129-150.

Tra le varie dimostrazioni dirette ed indirette, ma non preferibili a quella di FOURIER, notiamo quelle: di POINSOT, J. de l'École. Polytech., **13** (1806), p. 206. *Théorie générale de l'équilibre et du mouvement;* di AMPÈRE, *Démonstration générale du principe des vitesses virtuelles dégagée de la considération des infiniment petits;* ibidem., p. 247; e di NEUMANN, Berichte der Säch. Gesell. der Wiss. zu Leipzig, **31** (1879), p. 53 e **38** (1886); pag. 70; quest'ultima riprodotta nei Mathem. Annalen, **27** (1886), p. 502.

un altro gruppo di spostamenti che, conforme alle (3), saranno funzioni lineari ed omogenee dei primi e che diremo *dipendenti*. Ora il nostro scopo essendo di eliminare da (1) gli spostamenti dipendenti, possiamo procedere in due modi; o effettuando la risoluzione del sistema (3) rispetto agli spostamenti dipendenti; oppure operando col metodo dei coefficienti indeterminati o dei *moltiplicatori*.

Moltiplichiamo cioè le (3), successivamente, per delle funzioni indeterminate $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ e sommiamo colla (1); otterremo

$$\sum [(X + \lambda_1 A_1 + \cdots)\delta x + (Y + \lambda_1 B_1 + \cdots)\delta y + (Z + \lambda_1 C_1 + \cdots)\delta z] = 0.$$

Ma le λ sono in numero eguale agli spostamenti dipendenti; e però possiamo disporne per annullare, nella precedente, i coefficienti di questi spostamenti. Dopo ciò la stessa equazione conterrà, linearmente ed omogeneamente, i soli spostamenti arbitrarii; e allora anche i coefficienti di questi debbono essere nulli; cioè, in breve, tutti i coefficienti vanno a zero. Avremo quindi gruppi di equazioni come il seguente

$$(4) \qquad X + \lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \cdots = 0,$$

e due analoghe. Eliminando tra queste equazioni le funzioni λ in tutti i modi possibili, avremo le equazioni *necessarie* per l'equilibrio. Dopo ciò, e supposte verificate queste condizioni, i sistemi (4) ci faranno determinare le funzioni λ.

Passiamo alla considerazione degli spostamenti non invertibili; e supponiamo che le λ siano finite e determinate. Moltiplichiamo le (4), che si suppongono verificate, rispettivamente per le componenti δx, δy, δz di uno *spostamento qualunque* δP, sommiamo e facciamo lo stesso per tutte le equazioni analoghe; le λ essendo comuni a tutte le equazioni avremo

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum(X\delta x + \cdots) + \lambda_1 \sum(A_1 \delta x + \cdots) \\ \quad + \lambda_2 \sum(A_2 \delta x + \cdots) + \cdots = 0, \end{array} \right.$$

valida per *qualunque spostamento*. Per gli spostamenti invertibili essa, naturalmente, si riduce ad una identità.

Consideriamòla invece per gli spostamenti non invertibili, pei quali sarà

$$(6) \quad \lambda_1 \sum(A_1 \delta x + \cdots) + \lambda_2 \sum(A_2 \delta x + \cdots) + \cdots > 0.$$

Consideriamo uno speciale sistema di spostamenti non invertibili e precisamente quello per cui

$$(7) \qquad \sum(A_k \delta x + B_k \delta y + C_k \delta z) \lesseqgtr 0$$

mentre tutte le altre somme analoghe sono nulle. Risulta

$$\lambda_k \sum(A_k \delta x + \cdots) > 0;$$

cioè λ_k deve avere lo stesso segno del primo membro della (7), qualunque sia k. Ora poi è facile concludere che se sono soddisfatte le equazioni che si deducono dalle (4) colla eliminazione delle λ, e se per queste λ si ricavano valori finiti e deter-

minati e dello stesso segno dei primi membri di (7), allora la (6) ha luogo per ogni sistema di spostamenti non invertibili e quindi il lavoro virtuale del sistema è negativo. *Le condizioni enunciate sono perciò necessarie e sufficienti* *.

Le (4) ricevono una semplice interpretazione; supponiamo che esse si riferiscano ad un punto P del sistema. Questo, per l'azione della forza F e per quella dei vincoli, è in equilibrio. Tolti i vincoli, supposto cioè isolato il punto, l'equilibrio non ha più luogo; ma se però, nel tempo istesso, supponiamo il punto soggetto, oltre ad F, ad altre forze F_1, F_2, ... di componenti rispettive $\lambda_1 A_1$, $\lambda_1 B_1$, $\lambda_1 C_1$; ecc., le (4) esprimono che la risultante di F, F_1, ... è nulla ed il punto quindi è in equilibrio, come se agissero i vincoli. Si può dunque dire che le F_1, F_2, ... rappresentano le azioni che i vincoli esercitano sul punto P.

Nel caso speciale dei sistemi olonomi, se $\mathfrak{L}_i = 0$ è l'equazione di uno dei vincoli, si ha

$$A_i = \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial x}, \qquad B_i = \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial y}, \qquad C_i = \frac{\partial \mathfrak{L}_i}{\partial z};$$

la F_i è quindi normale alla superficie $\mathfrak{L}_i = 0$,

* Le considerazioni sul metodo dei moltiplicatori sono di LAGRANGE. Méc. analytique. Œuvres, II, p. 77; quelle relative ai segni delle λ, di OSTROGRADSKY; memoria citata al § precedente.

quando in essa si consideri variabile il solo punto $P(x, y, z)$.

§ 6. **Stabilità dell'equilibrio.**—Nel caso *a*) del § precedente le equazioni assumono la forma (2).

Se inoltre esiste una funzione U dei soli parametri q_i che figurano nelle Q_i e tale che

$$Q_i = \frac{\partial U}{\partial q_i},$$

allora le condizioni di equilibrio sono identiche con quelle della ricerca dei valori massimi o minimi di U e sono compendiate nella

$$\delta U = 0.$$

Se per i valori così determinati delle q la U è effettivamente massima, allora dimostreremo (Parte terza - Cap. 4.° § 5) che spostando infinitamente poco il sistema dalla sua posizione di equilibrio, dando ai varii punti una piccola velocità, gli spostamenti dei differenti punti del sistema, rispetto alla posizione di equilibrio, saranno compresi tra limiti determinati e assai piccoli; cioè l'equilibrio è *stabile* *. Nel caso di un sistema soggetto al solo peso possiamo dire che l'equilibrio

* LAGRANGE, *Méc. analyt.* Œuvres, **II**, pag. 69. Nello stesso volume è riprodotta la dimostrazione più rigorosa di DIRICHLET [Journal v. CRELLE, **32** (1846)] fondata su considerazioni di Dinamica. Vedi le osservazioni di ROBIN, Œuvres scient. Thermodynamique générale, pag. 79.

è stabile o no secondo che l'altezza del centro di gravità è oppur no un minimo, avendo scelto la verticale positiva verso l'alto.

§ 7. Alcune applicazioni del principio dei lavori virtuali.

a) *Un punto è posto sulla superficie di un corpo solido ed è soggetto ad una forza PF; condizioni di equilibrio.*

Se F è l'estremo della forza PF applicata in P, si ha

$$(F-P)|\delta P \overline{\gtrless} 0;$$

inoltre se N è un vettore unità parallelo alla normale interna

$$N|\delta P \overline{\gtrless} 0$$

secondo si tratta di spostamenti invertibili o no. Risulta

$$F-P+\lambda N=0$$

e inoltre $\lambda < 0$; si conclude che la forza è diretta secondo la normale interna.

Se poi il punto è obbligato a restare sulla superficie, restando nello spazio compreso tra questa e una superficie assai prossima, λ può avere un segno qualunque.

b) *Trovare le condizioni di equilibrio di un sistema di forze che sollecita un corpo rigido.* Rispetto ad una terna connessa col corpo rigido, la velocità di un punto P è (pag. 91)

$$\dot{P}=\dot{O}+|\Omega(P-O);$$

onde

$$|\dot{P} = |\dot{O} + \Omega(P - O)$$

e di seguito

$$(F - P)|\dot{P} = (F - P)|\dot{O} + \Omega(P - O)(F - P);$$

se $M - O$ è il momento, rispetto O, di $F - P$ si ha pure

$$|(M - O) = (P - O)(F - P).$$

Facendo la somma a tutte le forze del sistema, e dicendo $R - O$ la forza, $M - O$ il momento risultante, e τ un tempuscolo infinitamente piccolo si ha

$$\text{lav.}\, S = \tau[(R - O)|\dot{O} + (M - O)|\Omega].$$

Rispetto ad una terna x, y, z connessa col corpo si ha

$$\text{lav.}\, S = \tau[u_0 R_x + v_0 R_y + w_0 R_z + p M_x + \cdots]$$

(pag. 91 e 172); la quale può anche ricavarsi dalle (8) della pag. 91 col solito metodo delle proiezioni.

Se il corpo è libero, dovendo essere lav. $S = 0$, per qualunque spostamento e quindi qualunque siano $\dot{O}$ ed Ω, avremo

$$R - O = M - O = 0,$$

cioè ritroviamo le condizioni della pag. 173, in numero di *sei* *.

---

* Le sei equazioni di equilibrio di un sistema di forze si trovano, in forma complicata, in d'ALEMBERT: *Recher. sur la prèces.*, etc. Ch. 2, art. 24. (1749). La loro interpretazione mercè l'idea di coppia è dovuta a POINSOT: *Élémens de Statique* (1804).

Se il corpo ha un punto fisso: $\dot{O}=0$ e resterà

$$M-O=0;$$

le condizioni di equilibrio riduconsi a *tre*.

Se poi il corpo ha due punti fissi, Ω è la velocità angolare secondo l'asse; deve quindi esser nullo il momento del sistema lungo l'asse; le condizioni si riducono ad *una*.

Se infine il sistema rigido riposa con uno o più punti su di un piano fisso p. es., xy, e la z è positiva dalla parte del corpo, abbiamo

$$u_0 R_x + \cdots + p M_x + \cdots \stackrel{=}{<} 0;$$

mentre

$$w_0 + p x - q y \stackrel{=}{>} 0$$

secondo che gli spostamenti sono invertibili o no.

Procedendo secondo il metodo generale si ha

$$R_x = R_y = M_z = 0,$$
$$R_z + \lambda = 0, \qquad M_x + \lambda y = 0,$$
$$M_y - \lambda x = 0; \qquad \lambda > 0.$$

Il sistema, avendo nullo l'invariante e $R_z < 0$, è riducibile ad una forza unica normale al piano, che colpisce in un punto ξ, η tale che

$$M_x = \eta R, \qquad M_y = -\xi R;$$

quindi

$$\xi > 0, \qquad \eta > 0$$

potendo sempre supporre positive le x ed y dei varii punti del corpo. Questo è valido qualunque sia la direzione degli assi purchè le x, y dei punti di contatto siano positive. Dunque congiungendo

i punti di contatto due a due in modo che il poligono formato sia convesso, la risultante colpirà il piano xy in un punto interno a questo poligono.

Esercizi.

1. Un punto pesante è posto su di una ellissi il cui asse minore è verticale, ed è respinto dallo stesso proporzionalmente alla distanza. Posizione di equilibrio.

Si ha

$$X = k^2 x, \qquad Y = -P$$

$$k^2 x \delta x - P \delta y = 0, \qquad \frac{x}{a^2} \delta x + \frac{y}{b^2} \delta y = 0$$

e quindi $$x\left(k^2 + \frac{\lambda}{a^2}\right) = 0, \qquad \frac{y\lambda}{b^2} = P.$$

Per $x = 0$, il punto sta negli estremi asse minore; la pressione è eguale al peso. Poi $y = -Pb^2 : k^2 a^2$, purchè risulti minore di b. Il punto giace dalla parte delle y negative; pressione diretta secondo normale esterna; punto appoggiato contro parete concava.

2. Lo stesso per un punto pesante su di una parabola ad asse verticale ed attratto da un punto A della tangente al vertice proporzionalmente alla distanza.

Si ha

$$x^2 = 2py, \qquad X = k^2(a - x), \qquad Y = -P - k^2 y,$$

e come prima

$$k^2(a - x) + \lambda x = 0, \qquad P + k^2 y + \lambda p = 0;$$

λ è negativo, x positivo $< a$; inoltre

$$f(x) = x^3 + 2p\left(\frac{P}{k^2} + p\right) x - 2p^2 a = 0;$$

si ha una sola radice reale positiva e poichè

$$f(o) < o, \qquad f(a) > o,$$

una sola posizione di equilibrio. La pressione è diretta secondo normale esterna.

3. Due pesi uguali sono posti su di una parabola ad asse verticale e si respingono inversamente alla distanza. Posizione di equilibrio.

I punti (x, y), (x', y') siano alla distanza r; procedendo come prima si ha

$$\frac{k^2}{r^2}(x - x')p + \frac{k^2}{r^2}(y - y')x - Px = o$$

$$\frac{k^2}{r^2}(x' - x)p + \frac{k^2}{r^2}(y' - y)x' - Px' = o.$$

Sommando e tenendo presente equazione di curva,

$$\frac{k^2}{2pr^2}(x - x')^2(x + x') - P(x + x') = o.$$

Se $x + x' = o$, allora $y = y'$, è inoltre

$$\frac{2pk^2x}{r^2} - Px = o, \qquad r^2 = 4x^2;$$

onde $$x = \frac{1}{2}k\sqrt{2p : P}.$$

L'altra soluzione, essendo

$$r^2 = (x - x')^2\left[1 + \frac{1}{4p^2}(x + x')^2\right]$$

ci permette di determinare $x + x'$; ed essendo

$$xx' = -p^2,$$

potremo determinare x ed x'; ecc.

4. Lo stesso per un punto pesante su di una elica cilindrica ad asse verticale, respinto con intensità inversamente proporzionale al quadrato della distanza da un punto dell'asse.

Le componenti della forza sono

$$k^2 x : r^3, \qquad k^2 y : r^3, \qquad k^2 z : r^3 - P.$$

Inoltre

$$x \delta x + y \delta y = 0,$$

quindi

$$k^2 z : r^3 - P = 0, \qquad r^2 = a^2 + z^2 = u.$$

Posto

$$k^2 : P = \alpha,$$

risulta

$$u^3 - \alpha^2 u + \alpha^2 a^2 = 0.$$

Ha una sola radice negativa, da escludere. Le altre due sono positive o immaginarie; debbono inoltre essere $> a^2$. La pressione è diretta secondo normale principale.

5. Lo stesso per un punto su di una sfera, ed attratto dagli estremi di assi (positivi) proporzionalmente alla distanza.

Le forze essendo $k_1 r_1$, $k_2 r_2$, $k_3 r_3$, abbiamo

$X = k_1(a - x) - k_2 x - k_3 x = k_1 a - kx$; ecc.

essendo $k = k_1 + k_2 + k_3$.

Quindi

$$k_1 a - kx + \lambda x = 0, \qquad x = k_1 a : (k - a), \text{ ecc.}$$

$$\lambda = k \pm \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2}.$$

Le posizioni di equilibrio sono intersezioni di sfera con retta $x : y : z = k_1 : k_2 : k_3$.

6. Lo stesso per un punto pesante su di un ellissoide ad asse (minore) verticale e attratto verso il centro da una forza costante α.

Troviamo

$$\alpha x + \frac{\lambda x}{a^2} = 0, \qquad \alpha y + \frac{\lambda y}{b^2} = 0$$

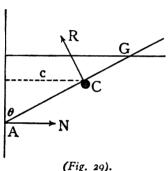
$$\alpha z + \frac{\lambda z}{c^2} + Pr = 0.$$

Se $x = 0$, risulta

$$y^2 + (1 - m^2) z^2 = 0, \qquad m = \frac{\alpha}{P c^2}(b^2 - c^2).$$

Le intersezioni di queste due rette con ellissoide dànno posizioni di equilibrio sul piano $y z$; uno solo dei punti delle rette può corrispondere a posizione di equilibrio. Lo stesso dicasi per $y = 0$.

7. Un'asta rettilinea pesante poggia su di un pernio orizzontale C, e con una estremità A contro un muro verticale. Posizione di equilibrio e reazioni.

(Fig. 29).

Sia G il centro di gravità, P il peso dell'asta, $A G = a$, c la distanza di C dal muro verticale; R la reazione su C e normale all'asta, N quella in A. Proiettando su di una orizzontale e su di una verticale:

$$- R \cos\theta + N = 0,$$
$$R \operatorname{sen}\theta - P = 0;$$

i momenti rispetto A, dànno

$$P a \operatorname{sen}\theta - R \,.\, A C = 0;$$

quindi

$$\operatorname{sen}\theta = \sqrt[3]{c : a}$$

e saranno determinate le reazioni.

Si potrebbe anche ragionare così; se z è ordinata di G, il lavoro virtuale di P è

$$- P \delta z = 0,$$

onde $\delta z = 0$ (Principio di Torricelli); ma

$$z = a \cos\theta - c \operatorname{cotg}\theta$$

$$\delta z = \left(- a \operatorname{sen}\theta + \frac{c}{\operatorname{sen}^2\theta}\right) \delta\theta;$$

e ricaviamo lo stesso valore per θ. Inoltre una traslazione lungo AG è un movimento non invertibile; il lavoro virtuale è

$$-P\delta a . \cos\theta < 0$$

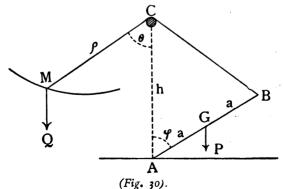
onde

$$\cos\theta > 0.$$

Per tal valore di θ, è $\frac{d^2 z}{d\theta^2} < 0$, e quindi l'equilibrio è *instabile*.

Ad ogni valore di θ e di a corrisponde un valore per c e quindi un punto C il cui luogo è una curva; sulla quale appoggiando l'asta, essa è, in ogni posizione, in equilibrio. Essendo $\delta z = 0$, il luogo di G è una orizzontale; AG è costante e quindi il luogo di C è un'astroide.

8. Un'asta rettilinea pesante AB può rotare intorno ad un asse orizzontale in A; una fune accavalciata ad una carrucola C situata sulla verticale di A sostiene B, e all'altra estremità M porta un peso Q mobile su di una curva. Come deve essere tale curva perchè in qualunque posizione del punto M su di essa si abbia equilibrio?

(Fig. 30).

Le equazioni dei vincoli sono

$$\rho = f(\theta),$$

equazione di curva su cui giace M; posto

$$AB = 2a, \qquad BC + CM = l$$

$$(l - \rho)^2 = 4a^2 + h^2 - 4ah\cos\varphi.$$

Il sistema giacendo in un piano verticale per h, l'unico spostamento possibile è una rotazione intorno ad A. Il lavoro virtuale di P è $Pa \operatorname{sen}\varphi\,\delta\varphi$; quello di Q, $-Q\delta(\rho\cos\theta)$. Col solito metodo dei moltiplicatori deduciamo

$$P + 2\lambda_1 h = 0, \qquad -Q\cos\theta + \lambda_2 + \lambda_1(l - \rho) = 0$$

$$Q\rho \operatorname{sen}\theta - \lambda_2 f'(\theta) = 0.$$

La eliminazione poi di λ_1 e λ_2 conduce alla

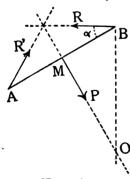
$$(l - \rho)d\rho + \frac{2hQ}{P} d(\rho\cos\theta) = 0,$$

donde integrando e sviluppando

$$\rho^2 = 2(l + b\cos\theta)\rho + \text{cost.}; \qquad b = 2hQ : P$$

che rappresenta una ovale di CARTESIO. Se poi la curva è obbligata a passare per C,

$$\rho = 2(l + b\cos\theta);$$

lumaca di PASCAL. (Vedi LORIA, l. c., pag. 140).

9. È dato un poligono piano snodato nei vertici; ogni asta è soggetta ad una forza normale, proporzionale alla lunghezza del lato e applicata nel punto di mezzo. Configurazione di equilibrio.

(Fig. 31).

Siano R ed R' le reazioni dei lati contigui ad AB; per l'azione di R, R' e di MP il lato è in equilibrio: onde R, R', i cui moduli sono eguali, concorrono in un punto di MP. Inoltre

$$R = MP : 2 \operatorname{sen} \alpha, \qquad MP = k . AB$$
$$R = k . AB : 2 \operatorname{sen} \alpha = k . BO$$

essendo BO normale ad R.

Considerando il lato successivo BC, la normale nel suo punto di mezzo incontrerà BO in un punto O', tale che (la reazione R essendo la stessa) $R = k . BO'$. Cioè $O' = O$.

Il poligono è inscrittibile in un cerchio. (Fig. 31).

10. Determinare le condizioni di equilibrio di un filo flessibile ed inestendibile, i cui punti A_0, A_1, ... A_n (a distanza finita tra di loro) sono sollecitati da certe forze F_0, F_1, ...

(Poligono funicolare).

Procedendo al modo solito si ottengono le equazioni

$$F_0 - A_0 - \lambda_1 (A_1 - A_0) = 0$$
$$F_r - A_r + \lambda_r (A_r - A_{r-1}) - \lambda_{r+1} (A_{r+1} - A_r) = 0$$
$$F_n - A_n + \lambda_n (A_n - A_{n-1}) = 0,$$

le quali esprimono che la F_r giace nel piano dei due lati concorrenti in A_r.

Basta infatti riflettere che una qualunque delle equazioni dei vincoli è

$$\mathfrak{L}_r = (x_r - x_{r-1})^2 + \ldots = \text{cost.} = l_r^2 ;$$

quindi
$$\delta \mathfrak{L}_r \overline{\leqq} 0$$

per gli spostamenti invertibili e non invertibili. Le λ_r sono negative; hanno segno qualunque se si immaginano sostituiti i fili con delle aste rigide. Posto

$$\lambda_r = - T_r : l_r , \qquad T_r > 0$$

sarà T_r la tensione del lato r^{mo}; e se α_r, β_r, γ_r sono i coseni direttori di $A_{r-1} - A_r$, avremo

$$X_r - T_r \alpha_r + T_{r+1} \alpha_{r+1} = 0,$$

e due analoghe, per $r = 0, 1, \ldots, n$, purchè si ponga $T_0 = T_{n+1} = 0$.

Le forze agli estremi sono situate lungo i lati; F_r, T_r,

T_{r+1} si fanno equilibrio e T_r agisce secondo $A_{r-1} - A_r$; ecc. Se le forze sono concorrenti, il poligono è piano. Si hanno $3n + 3$ equazioni ed eliminando le T, $2n + 3$ equazioni di equilibrio.

11. Determinare le condizioni di equilibrio di un poligono piano articolato, i cui lati sono soggetti a forze applicate in un loro punto.

Siano $A_0, A_1, \ldots, A_n = A_0$ i vertici; $A'_0, A'_1, \ldots$ le posizioni che rispettivamente assumono in uno spostamento virtuale del poligono nel proprio piano. Dalla prima si passa alla seconda con una traslazione δA_0, una rotazione $\delta\omega_0$ intorno A_0, $\delta\omega_1$ intorno A_1, ecc. ...; quindi

$$\delta A_r = \delta A_0 + i(A_r - A_0)\delta\omega_0 + i(A_r - A_1)\delta\omega_1 + \ldots$$
$$\ldots + i(A_r - A_{r-1})\delta\omega_{r-1};$$

essendo poi $\delta A_n = \delta A_0$

si ha

$$(1) \quad (A_n - A_1)\delta\omega_1 + \ldots + (A_n - A_{n-1})\delta\omega_{n-1} = 0.$$

In un punto B_r del lato $A_{r-1}\ A_r$ sia applicata una forza F_r; sarà

$$B_r = \alpha_{r-1}A_{r-1} + \alpha_r A_r, \qquad (\alpha_{r-1} + \alpha_r = 1)$$

quindi

$$\delta B_r = \delta A_0 + i(B_r - A_0)\delta\omega_0 + \ldots + i(B_r - A_{r-1})\delta\omega_{r-1}.$$

Sostituendo nell'equazione dei lavori virtuali

$$\delta B_1|F_1 + \ldots + \delta B_n|F_n = 0,$$

poichè nella (1) non figurano δA_0 e $\delta\omega_0$, deduciamo anzitutto

$$\sum F_r = 0, \qquad \sum i(B_r - A_0)|F_r = 0$$

cioè, come doveva essere, è nulla la risultante e il momento risultante delle forze. Posto

$$K_s = \sum_{r=s}^{n} i(B_r - A_{s-1})|F_r, \quad (s = 2, \ldots n)$$

si ha

$$K_2 \delta \omega_1 + \ldots + K_n \delta \omega_{n-1} = 0,$$

e colla (1) al modo solito, rispetto ad un sistema ortogonale,

$$K_s + \lambda(x_n - x_{s-1}) + \mu(y_n - y_{s-1}) = 0;$$

eliminando le λ e μ si hanno $n-4$ equazioni di equilibrio: p. es.

$$\begin{vmatrix} K_s & x_n - x_{s-1} & y_n - y_{s-1} \\ K_{n-1} & x_n - x_{n-2} & y_n - y_{n-2} \\ K_n & x_n - x_{n-1} & y_n - y_{n-1} \end{vmatrix} = 0. \quad (s = 2, \ldots n-2)$$

Fissati, ad esempio, A_n, A_{n-1}, A_{n-2} e riguardando K_s come funzione di x_{s-1}, y_{s-1}, l'equazione precedente rappresenta una curva su cui trovasi A_{s-1}. Se i tre punti sono in linea retta, sparisce il termine in K_s; l'equazione rappresenta una retta. Nel caso dell'esercizio 9, si ha

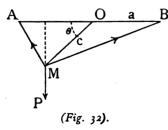
$$X_r = -2k^2(y_r - y_{r-1}), \qquad Y_r = 2k^2(x_r - x_{r-1})$$

$$K_s = 2k^2 \sum_{r=s}^{n} \left[\left(\frac{x_r + x_{r-1}}{2} - x_{s-1} \right) (x_r - x_{r-1}) + \ldots \right]$$

$$= k^2 [(x_n - x_{s-1})^2 + (y_n - y_{s-1})^2].$$

I vertici sono su di un cerchio.

12. Un punto M pesante è attratto da due punti fissi A e B proporzionalmente alla distanza ed è collegato con O (punto di mezzo di AB) mediante un'asta, di cui si trascura il peso, girevole in O. Posizione di equilibrio.

(*Fig. 32*).

Il lavoro virtuale del peso è

$$P\delta(c \operatorname{sen} \theta) = Pc \cos\theta\, \delta\theta;$$

quello delle altre due forze

$$-\alpha AM.\delta AM - \beta BM.\delta BM$$

(α e β costanti); cioè

$$-\tfrac{1}{2}\delta(\alpha \overline{AM}^2 + \beta \overline{BM}^2)$$

$$= ac(\beta - \alpha) \operatorname{sen}\theta\, \delta\theta,$$

Il lavoro totale è espresso da

$$\delta U = [a(\beta - \alpha)\,\text{sen}\,\theta + P\cos\theta]\,c\,\delta\theta.$$

Nella posizione di equilibrio

$$\text{tang}\,\theta = P : a(\alpha - \beta),$$

quindi due valori per θ, uno acuto, l'altro ottuso. Poscia

$$\delta^2 U = [a(\beta - \alpha)\,\text{cotg}\,\theta - P]\,c\,\text{sen}\,\theta\,\delta\theta^2$$

ed essendo, nell'equilibrio,

$$a(\beta - \alpha)\,\text{cotg}\,\theta - P = -\frac{a^2(\alpha - \beta)^2}{P} - P$$

risulta $\delta^2 U < 0.$

L'equilibrio è stabile, essendo U massima.

13. Un'asta AB girevole in A è attaccata mediante un filo nel centro di gravità B; il filo passa su di una piccola carrucola C situata sulla verticale di A e sostiene in D un peso Q. Inoltre $AB = AC$; posizione di equilibrio.

Risulta

$$DC = l - 2a\cos\theta$$

e procedendo come nell'esercizio precedente le posizioni di equilibrio sono determinate da

$$\frac{dU}{d\theta} = 2a[P\,\text{sen}\,2\theta + Q\,\text{sen}\,\theta] = 0$$

donde

$\theta = 0$, oppure $\cos\theta = Q : 2P$.

Ma per $\theta = 0$,

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} = -2P + Q$$

onde l'equilibrio è stabile se $Q < 2P$; mentre per l'altro valore (essendo sempre $Q < 2P$) risulta

$$\frac{d^2 U}{d\theta^2} > 0;$$

l'equilibrio non è stabile.

(Fig. 33).

14. Un'asta rigida è appoggiata in A nella parete interna d'un vaso a forma semisferica e in B sull'orlo orizzontale del vaso. Posizione di equilibrio.

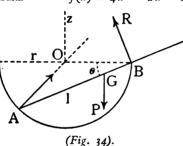
La figura è contenuta in un piano verticale. La ζ del centro di gravità G è

$$\zeta = (2r\cos\theta - l)\operatorname{sen}\theta.$$

Esprimendo che $\delta\zeta = 0$ e ponendo

$$\cos\theta = x, \qquad a = l : r$$

risulta
$$f(x) = 4x^2 - ax - 2 = 0;$$

(Fig. 34).

Ma $AB < 2l$, onde $x < a$; perchè quindi la $f = 0$ abbia una radice positiva occorre che

$$\sqrt{\frac{2}{3}} < a < 2.$$

Quanto alle reazioni in A e B,

$$Q\cos 2\theta - R\operatorname{sen}\theta = 0$$

$$Q\operatorname{sen} 2\theta + R\cos\theta = P$$

donde
$$Q = P\operatorname{tag}\theta, \qquad R = Pl : 2r.$$

15. Stabilità dell'equilibrio di un corpo pesante a contatto con una superficie fissa.

Supponiamo, per semplicità, che il corpo pesante abbia un piano di simmetria, contenente quindi il centro di massa G, e che tagli il corpo e la superficie fissa secondo due curve Γ' e Γ.

Se C è il punto di contatto e le due superficie sono levigate per l'equilibrio è necessario e basta che CG sia verticale e normale alle due curve Γ, Γ' e la direzione del peso sia nell'interno di Γ.

Se non sono levigate e se quindi Γ' può anche strisciare su Γ, basta che la CG sia verticale (§. 4). Immaginando spostato infinitamente poco il corpo, oppure Γ' su Γ, secondo che la traiettoria di G presenta rispetto C la convessità o la concavità, l'equilibrio sarà stabile o instabile. Ma riguardando Γ e Γ' come le due curve di C (centro istantaneo di rotazione) e costruendo il cerchio dei flessi (vedi pag. 115 e 120) possiamo dire che l'equilibrio è stabile se G cade entro questo cerchio; instabile se cade fuori.

Però tal cerchio dicesi anche *cerchio di stabilità.*

Così se una semisfera pesante di raggio R' poggia in C sulla sommità di una sfera di raggio R, è certamente soddisfatta la prima condizione: il cerchio di stabilità ha per raggio $RR':(R+R')$; il centro di gravità dista da C di $\frac{5}{8}R'$ (vedi eser. 22, Cap. prec.): dunque si ha stabilità se

$$\frac{5}{8}R' < \frac{RR'}{R+R'}$$

cioè se

$$R' < \frac{3}{5}R;$$

mentre se la semisfera è poggiata nel punto infimo si ha sempre stabilità.

[THOMSON a. TAIT, Nat. Philos., **2**, pag. 111 (1895). ROUTH, *A Treatise on Analytical Statics.* Vol. 1, pagina 172 e seg. (1896)].

16. Stabilità dell'equilibrio di un sistema astatico.

Supponiamo che un sistema di forze applicato ad un corpo rigido e di grandezza invariabile, ecc. si riduca ad una coppia di braccio AB e di forze P, $-P$. Scegliendo l'origine in A, il viriale del sistema è dato (eserc. 30, Cap. prec.) dal prodotto scalare di P per $B-A$; quindi esso è massimo se P ha la direzione di AB e minimo nel caso contrario: cioè in ogni caso quando il sistema è in equilibrio. Ma nel primo

caso, fermo restando il corpo, se spostiamo infinitamente poco la direzione di AB, si origina una nuova coppia il cui senso è opposto a quello della rotazione; nel caso contrario la coppia ha senso concorde a quello della rotazione; e però *l'equilibrio è stabile od instabile secondo che il viriale è massimo o minimo.* Essendo

$$V = \sum (Xx + Yy + Zz)$$

per l'equilibrio si ha effettivamente:

$$\delta V = \sum (X \delta x + \ldots) = 0.$$

Riflettendo poi (§. 7) che

$$\delta V = \tau \left[u_0 \sum X + \ldots + p \sum (Zy - Yz) + \ldots \right]$$

si deduce subito che

$$\delta^2 V = \tau^2 S$$

dove (eser. 8. Cap. prec.)

$$S = -(A_{22} + A_{33}) p^2 - \ldots + 2 A_{12} p q + \ldots.$$

E però secondo che $S \lesseqgtr 0$, l'equilibrio è stabile o instabile.

[Möbius, l. c., Bd. I, Cap. IX; Schell, l. c., **2**, Cap. XII].

CAPITOLO TERZO.

EQUILIBRIO DELLE CURVE FUNICOLARI.

§ 1. **Equazioni di equilibrio.** Consideriamo un filo flessibile ed inestensibile; un elemento ds di questo sia soggetto ad una forza applicata in un punto P dell'elemento e dello stesso ordine di ds. Se il modulo di $F - P$ è una quantità finita, tale forza è espressa da $(F - P)\,ds$. Supponiamo che lo stesso accada per gl'infiniti elementi in cui può immaginarsi decomposto il filo. Gli estremi potranno essere liberi oppure fissi o obbligati a restare sopra curve o superficie date, ecc.; ma, in ogni caso, possiamo supporli liberi e soggetti a due forze qualunque $F_0 - P_0$, $F_1 - P_1$.

La configurazione di equilibrio del filo sarà, generalmente, curva; di qui il nome di curva funicolare. Ora, applicando il principio generale dei lavori virtuali, vogliamo trovare le condizioni necessarie e sufficienti per l'equilibrio.

Il filo riceva un qualunque spostamento virtuale; la somma dei lavori virtuali delle forze distribuite lungo il filo è

$$\int (F - P) | \delta P . ds,$$

l'integrale essendo esteso tra o ed l (lunghezza del filo) e supponendo contati gli archi positivamente da P_0 a P_1. Avremo dunque

$$(1) \quad \begin{cases} (F_0 - P_0) | \delta P_0 + (F_1 - P_1) | \delta P_1 \\ \quad + \int (F - P) | \delta P . ds \mathrel{\overline{<}} 0. \end{cases}$$

Consideriamo ora le condizioni cui debbono soddisfare gli spostamenti invertibili o no dei varii elementi.

L'elemento ds è eguale al modulo di dP; avvenuto lo spostamento virtuale, l'elemento avrà variato di posizione e di grandezza e sarà eguale al modulo di $dP + d\delta P$. Ma per gli spostamenti invertibili la lunghezza di ogni elemento è restata inalterata; e per quelli non invertibili, il filo essendo inestensibile, la lunghezza sarà diminuita; quindi

$$dP^2 \geqq (dP + d\delta P)^2,$$

ed essendo

$$a^2 = a | a$$

risulta

$$2 dP | d\delta P + (d\delta P)^2 \mathrel{\overline{<}} 0.$$

Dividendo per ds^2 e trascurando gl'infinitesimi di ordine superiore si deduce

$$\frac{dP}{ds} \Big| \frac{d\delta P}{ds} \overline{\gtrless} 0,$$

cioè (pag. 11)

$$T \Big| \frac{d\delta P}{ds} \overline{\gtrless} 0. \tag{2}$$

Consideriamo anzitutto gli spostamenti invertibili; tenendo quindi in (1) e (2) il segno superiore; riflettendo che di equazioni analoghe alle (2) ne abbiamo infinite, relative agli elementi del filo; moltiplicando per una funzione λ dell'arco e sommando, risulta

$$\int \lambda T \Big| \frac{d\delta P}{ds} ds$$

$$= (\lambda T | \delta P)_0^l - \int \frac{d(\lambda T)}{ds} \Big| \delta P . ds = 0;$$

perciò basta osservare che

$$\frac{d}{ds} [\lambda T | \delta P] = \frac{d(\lambda T)}{ds} | \delta P + \lambda T | \frac{d\delta P}{ds}.$$

Sommando finalmente con la (1) e accennando con gl'indici 0 ed 1 le quantità che si riferiscono agli estremi P_0, P_1, si ha

$$[F_0 - P_0 - \lambda_0 T_0] | \delta P_0 + [F_1 - P_1 + \lambda_1 T_1] | \delta P_1$$
$$+ \int \left[F - P - \frac{d(\lambda T)}{ds} \right] | \delta P . ds = 0,$$

la quale contiene linearmente ed omogeneamente tutti gli spostamenti invertibili. Porremo ora, conforme al metodo generale, eguali a zero i singoli coefficienti degli spostamenti ed otterremo le con-

dizioni necessarie per l'equilibrio

$$(3) \qquad F - P - \frac{d(\lambda T)}{ds} = 0,$$

$$(4) \quad F_0 - P_0 - \lambda_0 T_0 = 0, \quad F_1 - P_1 + \lambda_1 T_1 = 0.$$

Le (4) valgono per i due estremi del filo e però diconsi *equazioni agli estremi*; la (3) vale per ogni punto intermedio, cioè per ogni valore di s compreso tra 0 ed l, e dicesi *equazione indefinita.*

È poi ancora sufficiente che la funzione λ [finita e determinata e diversa da zero nell'intervallo $(0, l)$] abbia, nello stesso intervallo, lo stesso segno del primo membro della (2) nel caso degli spostamenti non invertibili; cioè sia costantemente *negativa.*

Dalle (4) risulta che $F_0 - P_0$ è diretta secondo la tangente negativa in P_0; mentre in P_1 la forza è diretta secondo quella positiva. Per determinare il significato di λ, si tagli il filo in un punto P e dicasi τ la forza che occorre applicare in P, per ristabilire l'equilibrio. Tale forza è diretta secondo la tangente positiva e sarà variabile, in generale, da punto a punto; essa dicesi *tensione* del filo in P; sarà quindi $\tau > 0$. Il punto P essendo ora l'estremo superiore del filo e soggetto alla forza τT, dovremo applicare la seconda delle (4); cioè

$$\tau T + \lambda T = 0$$

onde

$$\tau = -\lambda.$$

Immaginando quindi nelle (3) e (4) sostituita $-\tau$ in luogo di λ avremo:

$$(5) \qquad F - P + \frac{d}{ds}(\tau T) = 0$$

$$(6) \quad F_0 - P_0 + \tau_0 T_0 = 0, \quad F_1 - P_1 - \tau_1 T_1 = 0.$$

Si può agevolmente verificare (conforme al postulato 1°, pag. 158) che da queste equazioni si deducono quelle che competono al sistema supposto rigido. Infatti, integrando la (5),

$$\int (F - P) ds + \tau_1 T_1 - \tau_0 T_0 = 0;$$

ed aggiungendo le (6):

$$F_0 - P_0 + F_1 - P_1 + \int (F - P) ds = 0;$$

è nulla cioè la risultante delle forze del sistema.

Inoltre

$$\frac{d}{ds} |(P - O) \tau T = |(P - O) \frac{d(\tau T)}{ds},$$

e però dalla (5):

$$\int |(P - O)(F - P) ds$$

$$+ |(P_1 - O) \tau_1 T_1 - |(P_0 - O) \tau_0 T_0 = 0, \text{ ecc.}$$

cioè è nullo il momento rispetto ad un punto O qualunque.

Se il filo è adagiato su di una superficie levigata, o possiamo seguire lo stesso metodo, oppure, più semplicemente, supporre il filo libero, applicando, nei varii elementi, delle forze normali

che rappresentano la reazione della superficie. Se quindi N_1 è un vettore unità parallelo alla normale, l'elemento ds, riguardato come libero, è sollecitato da $(F-P)\,ds$ e da $R\,N_1\,ds$, essendo R il modulo della reazione; quindi la (5) diventa

$$(7)\qquad F-P+R\,N_1+\frac{d(\tau T)}{ds}=0.$$

§ 2. **Equazioni in coordinate rettangolari; equazioni intrinseche.** Se rispetto al sistema fondamentale I, J, K, diciamo X, Y, Z le componenti di $F-P$, ecc. le (5) e (6) ci dànno agevolmente

$$(8)\qquad X+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dx}{ds}\right)=0,$$

$$(9)\qquad X_0+\left(\tau\frac{dx}{ds}\right)_0=0,\qquad X_1-\left(\tau\frac{dx}{ds}\right)_1=0$$

e analoghe.

Nel caso del filo adagiato sulla superficie

$$f(x,\ y,\ z)=0,$$

poichè le componenti di N_1 sono proporzionali alle derivate parziali di f, dalla (7) abbiamo

$$(10)\qquad X+\mu\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dx}{ds}\right)=0$$

e due analoghe.

Sviluppiamo la (5) e ricordiamo la (18) della pag. 11; si ha

$$F-P+T\frac{d\tau}{ds}+N\frac{\tau}{\rho}=0;$$

dicendo adunque Θ, N, B, le componenti del vet-

tore $F - P$ secondo la terna T, N, B, avremo

$$(11) \quad \Theta + \frac{d\tau}{ds} = 0, \qquad N + \frac{\tau}{\rho} = 0, \qquad B = 0,$$

cioè le equazioni intrinseche dell'equilibrio.

La prima di queste sussiste anche se il filo è adagiato su di una superficie; infatti Θ, in tal caso rappresenta la componente tangenziale di $F - P$ e di R; e quest'ultima è nulla.

Dalle (11) si deduce che la forza che sollecita l'elemento ds è contenuta nel piano osculatore e la componente normale è diretta secondo la direzione negativa della normale principale. Se il filo (libero o situato su di una superficie) non è soggetto a forze, oppure a forze normali è $\Theta = 0$, e quindi $\tau = \text{cost}$.

Nel caso del filo situato su di una superficie, la normale principale alla curva, ferma l'ipotesi precedente sulle forze, risulta anche normale alla superficie e *la curva di equilibrio è una curva geodetica.*

Possiamo ora proporci, in generale, questi due problemi.

1. *Data la configurazione del filo, la distribuzione delle forze, verificare se ha luogo equilibrio.*

2. *Data la distribuzione delle forze, determinare la configurazione di equilibrio.*

§ 3. **Risoluzione del primo problema.**—Bisogna verificare se sono soddisfatte le (5), (6) o le

loro equivalenti; però conviene valersi delle (11), nelle quali Θ e N sono note in funzione di s.

Eliminando τ, otterremo

$$\Theta = \frac{d(N\rho)}{ds}.$$

Supposta verificata questa equazione, la seconda delle (11) ci farà conoscere τ; cognita la tensione vedremo se sono soddisfatte le equazioni agli estremi.

§ 4. **Risoluzione del secondo problema.** — Il dato sistema di forze deve intanto soddisfare alle condizioni di equilibrio di un sistema rigido. Le forze, nel caso più generale, dipenderanno dalla posizione del punto di applicazione, dalla direzione dell'elemento e finalmente dall'arco. Riferendoci dunque alle (8), oppure alle (10), diremo che X, ... sono funzioni di x, y, z, x', y', z', s, in cui

$$x' = \frac{dx}{ds}, \quad \text{e poi} \quad x'' = \frac{d^2 x}{ds^2}; \text{ ecc.}$$

Il problema proposto sarà risoluto se sapremo determinare x, y, z, τ in funzione di s; queste quattro funzioni debbono soddisfare al seguente sistema di equazioni differenziali simultanee del 2° ordine

$$X + \tau' x' + \tau x'' = 0, \text{ ecc.}$$
$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1;$$

di cui le prime tre si deducono dalle (8) sviluppando le derivazioni. Ora dimostriamo che *la in-*

tegrazione di questo sistema dipende da quella di una sola equazione differenziale del sesto ordine.

Deriviamo infatti le prime tre quattro volte di seguito, e la quarta cinque volte rispetto l'arco s. Otterremo con ciò ventun equazioni contenenti:

$$x,\ x',\ \ldots,\ x^{\mathrm{VI}};\ y,\ y',\ \ldots,\ y^{\mathrm{VI}};\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{\mathrm{VI}},$$
$$\tau,\ \tau',\ \ldots,\ \tau^{\mathrm{V}}.$$

Tra queste equazioni possiamo eliminare:

1° le venti funzioni

$$y,\ y',\ \ldots,\ y^{\mathrm{VI}},\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{\mathrm{VI}};\ \tau,\ \tau',\ \ldots,\ \tau^{\mathrm{V}};$$

2° oppure

$$x^{\mathrm{VI}};\ y',\ \ldots,\ y^{\mathrm{VI}};\ z,\ z',\ \ldots,\ z^{\mathrm{VI}};\ \tau,\ \tau',\ \ldots,\ \tau^{\mathrm{V}};\ \text{ecc.}$$

Otterremo quindi, prescindendo dalle difficoltà di calcolo,

$$\varphi(x,\ x',\ \ldots\ x^{\mathrm{VI}},\ s) = 0,$$
$$\varphi_1(x,\ x',\ \ldots\ x^{\mathrm{V}},\ y,\ s) = 0,\ \text{ecc.}$$

La prima è un'equazione differenziale del sesto ordine, la quale definisce x in funzione di s e di sei costanti arbitrarie;

$$x = x(s,\ c_1,\ c_2,\ \ldots\ c_6).$$

La seconda, dopo che con successive derivazioni avremo trovato $x',\ \ldots\ x^{\mathrm{V}}$ espresse per s, si trasformerà in una equazione tra y ed s; e però, senza nuove integrazioni, conosceremo y in funzione di s e di $c_1,\ \ldots\ c_6$.

Lo stesso dicasi per z e per τ ed il teorema è provato.

Con un ragionamento analogo possiamo provare che

La determinazione della figura di equilibrio di un filo posto su di una superficie levigata, dipende dalla integrazione di una equazione differenziale del quarto ordine.

In tal caso infatti insieme colle (10), in cui figura la funzione incognita μ, si devono considerare le

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1, \quad f(x, y, z) = 0;$$

l'ultima delle quali è già una delle equazioni finite della curva di equilibrio.

Dunque la sola conoscenza delle forze non è sufficiente a determinare la configurazione di equilibrio, ed infatti nulla avendo fissato circa gli estremi, trovata una configurazione ne restano determinate infinite altre. Bisogna dunque fissare le condizioni agli estremi; p. es., se, nel caso più comune, li supponiamo fissi e diamo le loro coordinate per $s = 0$ e per $s = l$, avremo:

$$x_0 = x(0, c_1, \ldots, c_6), \; x_1 = x(l, c_1, \ldots, c_6), \text{ ecc.}$$

Le quali sei equazioni, in generale, determinano le costanti; avremo tante posizioni di equilibrio per quante sono le soluzioni reali (anche infinite) del sistema precedente.

Se il filo sta su di una superficie, possiamo dare due sole delle coordinate di P_0 e di P_1 e quindi stabilire quattro equazioni tra le quattro costanti.

§ 5. **Di alcuni integrali primi delle equazioni di equilibrio delle curve funicolari.**—Nulla in generale possiamo dire sulla integrazione delle equazioni differenziali di sesto o quarto ordine del § precedente. Solo in alcuni casi, abbastanza generali, è possibile assegnare a priori alcuni integrali primi delle equazioni di equilibrio e dei quali possiamo valerci per abbassare l'ordine delle equazioni suddette.

a) Cominciamo subito ad osservare che *se le forze sono funzioni del solo arco,* il problema si può ricondurre alle quadrature.

In tal caso infatti, dalla (5) risulta

$$\int (F - P)\, ds + \tau T = \text{cost.},$$

la quale ci farà conoscere τ; quindi dalle (8) otteremo tre equazioni della forma

$$x' = \varphi_1(s), \quad y' = \varphi_2(s), \quad z' = \varphi_3(s).$$

b) *Le forze ammettono un potenziale* V; cioè esiste una funzione V delle sole coordinate del punto P e tale che le sue derivate negative, rispetto x, y, z, dànno le componenti della forza; cioè

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad Y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \quad Z = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Allora

$$\Theta = (F - P)|T = X\frac{dx}{ds} + \cdots = -\frac{dV}{ds},$$

e la prima delle (11) ci dà

$$\frac{dV}{ds} = \frac{d\tau}{ds},$$

donde

$$(12) \qquad \tau = V + h$$

h essendo una costante arbitraria. Questo integrale, che ci fa conoscere la tensione, a meno di una costante, sussiste anche, nelle stesse ipotesi, per un filo posto su di una superficie.

c) *Le forze incontrano una retta fissa.* Il momento di $F - P$ rispetto a quest'asse è nullo; quindi dalla (5)

$$\text{mom.} \frac{d}{ds}(\tau T) = 0$$

oppure

$$\frac{d}{ds}(\tau \,\text{mom.}\, T) = 0;$$

quindi abbiamo l'integrale

$$(13) \qquad \tau \,\text{mom.}\, T = a.$$

Così p. es., se la retta è l'asse x, avremo

$$(14) \qquad \tau(yz' - y'z) = a.$$

Perchè lo stesso abbia luogo per un filo situato su di una superficie, per la (7), occorre che mom. $N_1 = 0$; cioè la N_1, normale alla superficie, deve incontrare la retta; dunque *la superficie deve essere di rotazione intorno a quella retta.*

d) *Le forze sono centrali*; cioè concorrono sempre in un punto O.

Il piano osculatore della curva dovendo pas-

sare per O, la curva di equilibrio è contenuta in un piano passante per O.

Scegliendo O come origine di un sistema di coordinate ortogonali avremo tre integrali analoghi a (14); cioè

$$\tau(yz' - y'z) = c_1, \quad \tau(zx' - z'x) = c_2$$
$$\tau(xy' - x'y) = c_3$$

donde

$$c_1 x + c_2 y + c_3 z = 0,$$

che appunto esprime la proprietà accennata.

e) *Le forze sono parallele e non dipendono dall'arco.* La curva di equilibrio è contenuta in un piano parallelo alla direzione delle forze; inoltre in questo caso possiamo formare l'equazione differenziale da cui dipende la risoluzione del problema.

Il piano della curva sia il piano xz; l'asse z parallelo alle forze e $F_1 ds$ l'intensità in P; le (8) si riducono alle

$$\frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad F_1 + \frac{d}{ds}\left(\tau \frac{dz}{ds}\right) = 0$$

donde

$$\tau \frac{dx}{ds} = c$$

e potremo sempre supporre $c > 0$. Pei punti della curva z è funzione di x; posto $p = \frac{dz}{dx}$, risulta

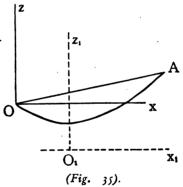
$$\frac{dx}{ds} = 1 : \sqrt{1 + p^2}, \quad \frac{dz}{ds} = p : \sqrt{1 + p^2}.$$

$$(16) \qquad z_1 = a \operatorname{Ch} \frac{x_1}{a}$$

che è l'equazione della catenaria omogenea *. Si ha pure

$$(17) \qquad s = \text{cost.} + a \operatorname{Sh} \frac{x_1}{a} .$$

Nella (16), come sapevamo, figurano le tre costanti arbitrarie x_0, z_0, c. Per determinarle diamo i due punti a cui il filo è sospeso e la lunghezza

(Fig. 35).

l del filo. L'origine O sia il punto di sospensione più basso; A (α, β) l'altro. Quindi dalla (16) e (17) avremo

---

* Per la storia e le proprietà di questa curva considerata da GALILEO, 8, p. 310 che ne aveva notata la somiglianza, non la identità, colla parabola, rimandiamo all'opera del LORIA, p. 575.

$$-z_0 = a\,\mathrm{Ch}\frac{x_0}{a}$$

$$\beta - z_0 = a\,\mathrm{Ch}\frac{\alpha - x_0}{a}$$

$$l = a\,\mathrm{Sh}\frac{\alpha - x_0}{a} - a\,\mathrm{Sh}\frac{-x_0}{a}$$

cioè:

$$l = a\left(\mathrm{Sh}\frac{\alpha - x_0}{a} + \mathrm{Sh}\frac{x_0}{a}\right)$$

$$\beta = a\left(\mathrm{Ch}\frac{\alpha - x_0}{a} - \mathrm{Ch}\frac{x_0}{a}\right)$$

e finalmente

$$l^2 - \beta^2 = 4\,a^2\,\mathrm{Sh}^2\frac{\alpha}{2\,a};$$

estraendo la radice quadrata, e ritenendo il segno positivo perchè si può sempre supporre α e β positivi; ponendo $\xi = \alpha : 2\,a$, si ha

$$\frac{\mathrm{Sh}\,\xi}{\xi} = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha}, \tag{18}$$

equazione trascendente in ξ. Se risolviamo rispetto a ξ, sarà determinato a, e quindi riflettendo che

$$l + \beta = a\,e^{-\frac{x_0}{a}}\left(e^{\frac{\alpha}{a}} - 1\right)$$

troveremo x_0 e infine z_0. Esaminiamo la (18); il primo membro cresce costantemente per $\xi = 0$ a $\xi = \infty$ da 1 ad ∞. Essa quindi avrà una sola radice reale positiva purchè il secondo membro sia maggiore di 1; e ciò è; infatti

$$l > OA$$

onde $$l^2 > \alpha^2 + \beta^2 .$$

La risoluzione della (18) può effettuarsi col metodo delle approssimazioni successive; oppure graficamente costruendo la intersezione della curva

$$y = \operatorname{Sh} \xi$$

e della retta

$$y = \frac{\sqrt{l^2 - \beta^2}}{\alpha} \xi .$$

Sono state costruite delle tavole che agevolano, negli usi della pratica, tale risoluzione.

Se A ed O stessero sulla stessa orizzontale, $\beta = 0$; ma tutto ciò che precede è valido ancora.

La (18) è soddisfatta inoltre da una radice negativa eguale, in valore assoluto, alla positiva. Alla radice negativa corrisponde una catenaria colla concavità volta in basso; che non è certo una posizione di equilibrio.

La configurazione corrispondente alla radice positiva è stabile.

(Vedi esercizio 11).

Esercizi.

1. Un filo fissato in due punti ha i suoi elementi respinti da una retta AB (asse x) normalmente e proporzionalmente alla distanza. Dimostrare che un'elica cilindrica può essere figura di equilibrio.

Le equazioni di equilibrio sono

$$\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dx}{ds}\right)=0,\qquad \omega^2 y+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dy}{ds}\right)=0$$

$$\omega^2 z+\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dz}{ds}\right)=0.$$

Se la figura di equilibrio è un'elica di asse AB e raggio R, si ha

$$\frac{dx}{ds}=\cos\alpha,\qquad \frac{dy}{ds}=-\frac{z\,\text{sen}\,\alpha}{R},\qquad \frac{dz}{ds}=\frac{y\,\text{sen}\,\alpha}{R};$$

essendo

$$\tau\cos\alpha=c$$

da seconda e terza si deduce

$$c=\frac{R^2\omega^2\cos\alpha}{\text{sen}^2\alpha}$$

che determina c e quindi la tensione.

2. Nello stesso problema investigare la curva di equilibrio supponendo il filo fisso in A e in B.

Essendo nel caso c) del § 5 sussiste la (13); ma in A e B il momento di T è nullo; è quindi sempre nullo; cioè la curva è contenuta in un piano passante per AB; p es., il piano xy.

Avremo

$$c\frac{dy'}{ds}+\omega^2 y=0,\qquad y'=\frac{dy}{ds}$$

donde

$$\sqrt{1+y'^2}=\frac{b^2-y^2}{a^2},\qquad a^2=\frac{2c}{\omega^2}.$$

$$\tau=\frac{c(b^2-y^2)}{a^2};$$

per essere y' reale per $y=0$, risulta $b>a$. Inoltre

$$dx=\pm a^2dy:\sqrt{f(y)},\qquad ds=(b^2-y^2)dy:\sqrt{f(y)}$$

$$f(y)=(b^2-y^2)^2-a^4.$$

Le integrazioni conducono ad integrali ellittici. Da 0 a

$+\sqrt{b^2-a^2}$, y cresce e dovremo tenere il segno $+$ avanti il radicale; nel punto più alto M, $x=\xi$, y' è nullo e la tangente è parallela ad x; poscia y decresce col crescere di x, ecc.; la curva ha forma di sinusoide.

La riduzione a funzioni ellittiche si fa semplicemente ponendo

$$y=\sqrt{b^2-a^2}\,\mathrm{sen}\,\varphi$$

donde facilmente

$$x=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^\varphi\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},\qquad \Delta\varphi=\sqrt{1-\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}\mathrm{sen}^2\varphi}$$

e l'equazione della curva è

$$y=\sqrt{b^2-a^2}\,\mathrm{sn}\,\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}x.$$

La y si annulla per $x=2\xi, 4\xi, \ldots.$ Se $AB=\alpha$ e la curva ha una sola onda allora $\xi=\frac{1}{2}\alpha$, cui corrisponde un arco $\sigma=\frac{1}{2}l$; se le onde sono due $\xi=\frac{1}{4}\alpha$, ecc., e si hanno quindi infinite configurazioni di equilibrio. Se diciamo σ l'arco corrispondente a ξ, poichè

$$\sigma=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{b^2-(b^2-a^2)\,\mathrm{sen}^2\varphi}{\Delta\varphi}d\varphi$$

$$\xi=\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\Delta\varphi},$$

risulta

$$\frac{\sigma-\xi}{\sigma+\xi}=k^2\frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2\varphi\,d\varphi}{\Delta\varphi}}{\int_0^{\frac{\pi}{2}}\Delta\varphi\,d\varphi},\qquad k^2=\frac{b^2-a^2}{b^2+a^2}.$$

Dati σ e ξ, risolvendo questa equazione trascendente,

possiamo trovare k^2. Ma il secondo membro cresce da 0 ad 1 quando k cresce da 0 ad 1; onde abbiamo una sola radice reale.

Questo caso si realizza nel moto uniforme di una corda intorno ad un asse: e però la curva che potrebbe dirsi « *spirale ellittica* » è detta « *courbe à sauter* » (LORIA, l. c., p. 558).

[APPELL, l. c., p. 196; GREENHILL, *The applications of Elliptic Functions*, p. 67 (1892)].

3. Trattare lo stesso problema nel caso generale.

Le forze ammettono un potenziale

$$V = -\frac{1}{2}\omega^2(y^2 + z^2);$$

onde (12)

$$\frac{1}{2}\omega^2 r^2 + \tau = h > 0, \qquad r^2 = y^2 + z^2.$$

Poscia (14)

$$\tau(y z' - y' z) = a$$

$$\tau x' = c.$$

Ma

$$(y z' - y' z)^2 = (y^2 + z^2)(y'^2 + z'^2) - (y y' + z z')^2$$

$$= r^2\left(1 - \frac{c^2}{\tau^2}\right) - r^2 r'^2 = \frac{a^2}{\tau^2}$$

donde

$$r\frac{dr}{ds} = \frac{\sqrt{f(r^2)}}{h - \frac{1}{2}\omega^2 r^2},$$

dove

$$f(r^2) = r^2\left[\left(h - \frac{1}{2}\omega^2 r^2\right)^2 - c^2\right] - a^2;$$

poi assumendo un sistema di coordinate polari nel piano yz si ha

$$a = \tau r^2 \frac{d\theta}{ds};$$

$$r\,d\theta = a\,dr : \sqrt{f(r^2)}$$

equazione differenziale della proiezione della curva di equilibrio sul piano yz. Infine

$$dx = \frac{c\,ds}{\tau} = \frac{c\,r\,dr}{\sqrt{f(r^2)}};$$

veniamo, colle integrazioni, ad avere oltre h, c, a altre tre costanti arbitrarie.

La discussione può farsi col sussidio delle funzioni ellittiche.

[Rend. Reale Acc. di Napoli, aprile 1892; GREENHILL, l. c., p. 210].

4. Se le forze che sollecitano il filo sono centrali, la curva è piana e

$$\tau r^2 \frac{d\theta}{ds} = c.$$

Dimostrare inoltre che

$$F_1 = c\frac{r r'' - 2r'^2 - r^2}{r^3\sqrt{r^2 + r'^2}}.$$

Se nel piano yz della curva assumiamo un sistema di coordinate polari, trasformando la (14) otteniamo precisamente

$$\tau r^2 \frac{d\theta}{ds} = c.$$

Di più

$$F_1\,dr + d\tau = 0$$

$$F_1 = -\frac{d\tau}{dr} = -c\frac{d}{dr}\frac{\sqrt{r^2 + r'^2}}{r^2}, \text{ ecc.}$$

5. Nell'ipotesi del problema precedente calcolare F_1 supponendo che la curva di equilibrio sia una spirale logaritmica oppure una spirale sinusoide. Le forze sono dirette al polo.

Se
$$r = e^{m\theta},$$
si trova subito
$$F_1 = \frac{a\sqrt{1+m^2}}{r^2};$$
se
$$r^k \cos k\theta = c,$$
abbiamo
$$F_1 = -\frac{(k-1)r^{k-2}}{c}.$$

[Catenaria di egual resistenza per forze centrali. BONNET, J. de Liouville, **9** (1844)].

6. Un filo, sospeso in due punti, è soggetto a forze parallele proporzionali alla tensione. Figura di equilibrio.

La curva sia nel piano xy e l'asse y parallelo e contrario alle forze; inoltre
$$aF_1 = \tau;$$
$$\tau\frac{dx}{ds} = c, \quad \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dy}{ds}\right) - \frac{1}{a}\tau = 0$$
$$ay'' = (1 + y'^2), \quad y' = \frac{dy}{dx}$$
il raggio di curvatura ha proiezione costante su asse y.

Integrando e spostando le x in modo da annullare la costante si deduce anzitutto
$$y' = \operatorname{tang}\frac{x}{a}$$
e quindi
$$e^{ay}\cos ax = 1.$$

Notiamo poi
$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{a}\cos\frac{x}{a}$$
$$\frac{ds}{dx} = \frac{1}{\cos\frac{x}{a}};$$

integrando si trova che

$$e^{\frac{s}{a}} + e^{-\frac{s}{a}} = \frac{2}{\cos\frac{x}{a}} = \frac{2\rho}{a}$$

quindi

$$\rho = a \operatorname{Ch} \frac{s}{a}$$

equazione intrinseca, della stessa forma della (16).

La curva dicesi *catenaria di egual resistenza.*

[D. Gilbert, Phil. Trans. (1826), Part III, 202. Coriolis, J. de Liouville, **1** (1836); Loria, l. c., p. 580]:

7. Lo stesso problema supponendo che la forza che sollecita un elemento sia proporzionale alla proiezione dell'elemento su asse x.

Si ha

$$F_1 = -k^2 dx$$

$$\tau \frac{dx}{ds} = c, \quad \tau \frac{dy}{ds} = k^2 x + ac$$

eliminando τ:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{k^2}{c} x + a$$

ed integrando

$$y = \frac{1}{2} \frac{k^2}{c} x^2 + ax + \text{cost.}$$

Dicesi *catenaria parabolica* o *curva dei ponti sospesi.*

La costante a si determina dando un altro punto B su asse x; essendo poi

$$\tau = c : \cos\alpha$$

la tensione è massima agli estremi.

8. Curva di equilibrio di un filo soggetto a forze centrali e funzioni della sola distanza.

La curva è piana; in coordinate polari si ha

$$\tau r^2 \frac{d\theta}{ds} = c,$$

e notando che

$$\Theta = F_1(r)\frac{dr}{ds}$$

da (11) ricaviamo

$$\frac{d\tau}{dr} + F_1 = 0$$

$$\tau = h - \varphi(r); \quad \varphi(r) = \int F_1(r)\,dr.$$

Dai due integrali si trae

$$d\theta = \pm\, c\,dr : r\sqrt{r^2[h - \varphi(r)]^2 - c^2};$$

il problema è ridotto alle quadrature.

Se la forza è costante, $F_1 = k$ (positivo se la forza è ripulsiva): $\varphi(r) = -kr$

$$\tau = h + kr, \quad r > -h : k;$$

ci riduciamo a integrali esprimibili con funzioni elementari.

In particolare se $h = 0$, ponendo

$$kr^2 = \frac{c}{u}$$

la quadratura si effettua subito e si ottiene

$$r^2 \cos 2(\theta - \theta_0) = c : k^2,$$

cioè una *iperbole equilatera*. Si può collo stesso procedimento trattare il caso di due o più centri di attrazione.

9. Catenaria omogenea su di un piano inclinato.

Sul piano, asse x sia orizzontale, z normale al piano formi angolo α colla verticale. La reazione N è normale; quindi le equazioni di equilibrio sono

$$\frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dx}{ds}\right), \quad -P\cos\alpha + \frac{d}{ds}\left(\tau\frac{dy}{ds}\right),$$

$$-P\,\text{sen}\,\alpha + N = 0,$$

perchè $\frac{dz}{ds} = 0$. Le prime due essendo analoghe a quelle

del § 5, (*e*), la curva è una catenaria analoga alla (16), ma in cui P è sostituito da $P \cos\alpha$. La reazione è $P \operatorname{sen}\alpha$.

10. Nuova forma delle equazioni di equilibrio di un filo su di una superficie.

Dalla (7) abbiamo

$$F - P + T\frac{d\tau}{ds} + N\frac{\tau}{\rho} + RN_1 = 0.$$

Ora sia T_1 un vettore unità normale a T ed N_1 e diciamo α l'angolo che la proiezione di forza su piano T, T_1 (piano tangente) forma con T; γ quello che la forza forma con N_1; θ sia l'angolo tra piano tangente e osculatore (complementare di N, N_1). Posto $\operatorname{mod}(F - P) = F_1$, si ha

$$F - P = F_1 (T \operatorname{sen}\gamma \cos\alpha + T_1 \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\alpha + N_1 \cos\gamma)$$
$$N = T_1 \cos\theta + N_1 \operatorname{sen}\theta;$$

quindi

$$\frac{d\tau}{ds} + F_1 \operatorname{sen}\gamma \cos\alpha = 0, \qquad \frac{\tau}{\rho}\cos\theta + F_1 \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\alpha = 0,$$
$$R + \frac{\tau}{\rho}\operatorname{sen}\theta + F_1 \cos\gamma = 0.$$

Ma se ρ_1 è il raggio di curvatura geodetica, r il raggio di curvatura della sezione normale avente la stessa tangente, si ha

$$\rho_1 = \rho : \cos\theta, \qquad r = \rho : \operatorname{sen}\theta$$

(teorema di MEUSNIER) e le equazioni precedenti diventano

$$\frac{d\tau}{ds} + F_1 \operatorname{sen}\gamma \cos\alpha = 0, \qquad \frac{\tau}{\rho_1} + F_1 \operatorname{sen}\gamma \operatorname{sen}\alpha = 0$$
$$\frac{\tau}{r} + F_1 \cos\gamma + R = 0$$

e di qui, se diciamo α_1 l'angolo di curvatura geodetica, abbiamo

$$\frac{d\tau}{\tau} = \frac{ds}{\rho_1 \operatorname{tag}\alpha} = \frac{d\alpha_1}{\operatorname{tag}\alpha}.$$

Possiamo trarre una conseguenza notevole. La figura di

equilibrio di un filo posto su di una sviluppabile, soggetto a forze le cui proiezioni ortogonali cadono su generatrici è la stessa di quella del piano su cui si svolge purchè non varino le forze; e reciprocamente.

Così la figura di equilibrio d'una catenaria cilindrica sviluppata su di un piano è una catenaria omogenea; la catenaria di un cono retto ad asse verticale è la figura di equilibrio d'un filo soggetto a forze centrali costanti (eserc. 8), ecc.

11. Tra le curve passanti per due punti dati e aventi la stessa lunghezza, la catenaria ha il centro di gravità più basso. Stabilità della catenaria.

Si deve cercare la curva per cui è minimo

$$\int z\,ds : \int ds$$

essendo

$$\int ds = \text{cost.}$$

cioè il minimo di

$$u = \int (z + a)\,ds.$$

Più generalmente, valendoci del calcolo delle variazioni, annulliamo la variazione prima di

$$\int \varphi\,ds.$$

Osservando che

$$\delta\varphi = \sum \frac{\partial\varphi}{\partial x}\delta x, \quad \delta ds = \sum \frac{dx}{ds}\delta dx,$$

e ancora che

$$\int \varphi \frac{dx}{ds} d\delta x \,.\, ds = \left(\varphi \frac{dx}{ds}\delta x\right)_0^l - \int_0^l \frac{d}{ds}\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right)\delta x\,ds,$$

giungiamo alle seguenti equazioni

$$\frac{d}{ds}\left(\varphi \frac{dx}{ds}\right) - \frac{\partial\varphi}{\partial x} = 0, \text{ ecc.}$$

che sono precisamente le equazioni di equilibrio di un filo

la cui tensione è φ e le forze ammettono il potenziale φ (§ 2). Se $\varphi = Pz + h$ abbiamo precisamente la catenaria omogenea.

Lo stesso risultato vale per un filo situato su di una superficie levigata. Resterebbe a dimostrare che u è effettivamente un minimo; ciò che può farsi esaminando la variazione seconda.

[Tale discussione è stata fatta da MAYER, Mathem. Ann., **13**; pag. 65 (1878). Vedi pure KNESER, *Lehrbuch der Variationsrechnung*, pag. 142. Braunschweig (1900)].

Dunque la catenaria è una figura stabile di equilibrio.

12. Figura di equilibrio di un filo omogeneo pesante posato su di una sfera o superficie di rotazione ad asse verticale.

Se l'asse z è verticale e P è il peso dell'unità di lunghezza si ha

$$V = Pz$$

onde per (12) e per (14) si ha

$$\tau = h + Pz, \qquad \tau(xy' - x'y) = c$$

alle quali sono da aggiungere le

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \qquad xx' + yy' + zz' = 0$$

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = 1;$$

oppure

$$x^2 + y^2 = 2\varphi(z), \text{ ecc.}$$

se il filo è su di una superficie di rotazione.

Ma dalla identità

$$(x^2 + y^2)(x'^2 + y'^2) - (xx' + yy')^2 = (xy' - x'y)^2$$

esprimendo tutto per z e z', si deduce agevolmente

$$az' = \pm\sqrt{f(z)} : (Pz + h)$$

dove

$$f(z) = (a^2 - z^2)(Pz + h)^2 - c^2.$$

Poscia dalla

$$xy' - x'y = c : (Pz + h)$$

si ricava

$$\frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{c}{(a^2 - z^2)(Pz + h)}.$$

Il problema è ridotto alle quadrature ellittiche: $f(z)$ è negativa per $z = \pm a$ ed essendo z compreso tra $+a$ e $-a$, in un tratto compreso tra $+a$, $-a$, $f(z)$ deve risultare positiva; cioè $f(z)$ ha almeno due radici reali; *la catenaria sferica è compresa tra due paralleli ai quali* (per essere ivi $z' = 0$) *risulta tangente.*

[Rend. Acc. Napoli; maggio 1892].

Facendo uso di coordinate sferiche, l'ultima relazione ci dà l'equazione della catenaria sferica, cioè

$$d\varphi = c\, d\theta : \operatorname{sen}\theta \sqrt{a^2 \operatorname{sen}^2\theta (a P \cos\theta + h) - c^2}.$$

Se una estremità è libera $\tau = 0$; oppure se giace nel punto più alto della sfera $x' = y' = 0$; in questi casi $c = 0$ e però essendo $x y' - x' y = 0$ la curva è piana e contenuta in un piano meridiano verticale. Possiamo ancora avere una configurazione di equilibrio in un piano orizzontale. La reazione (verso l'esterno) è data da $\frac{1}{a}(2 P z + h)$.

[A. G. Greenhill, *The spherical Catenary.* Proceedings of the London Mathem. Society, **27** (1896) in cui è discussa, e disegnata una catenaria sferica algebrica. Vedi pure i modelli matematici già citati].

Pubblicati a tutto Settembre 1906.

AVVERTENZA

Tutti i **Manuali Hoepli** *sono elegantemente legati in tela e si spediscono* **franco di porto** *nel Regno. — Chi desidera ricevere i volumi raccomandati onde evitare lo smarrimento, è pregato di aggiungere la sopratassa di raccomandazione.*

Ai Librai sconto D — spese di porto a loro carico.

☞ **I libri non raccomandati, viaggiano a rischio e pericolo del committente.** ☜

ELENCO COMPLETO DEI MANUALI HOEPLI

Disposti in ordine alfabetico per materia.

L. c.

Agricoltore (Prontuario dell') e dell' ingegnere rurale, di V. Niccoli, 3ª edizione di pag. XL-500, con 30 inc. 5 50
— **(Il libro dell')** Agronomia, agricoltura, industrie agricole del Dott. A. Bruttini, di pag. XX-446 con 303 fig. 3 50
Agrimensura (Elementi di), con speciale riguardo all'insegnamento nelle scuole di Agricoltura ed ai bisogni pratici dell'agricoltore, di S. Ferreri Mitoldi, di pag. XVI-257, con 183 inc. e una tavola colorata . 2 50
Agronomia, del Prof. Carega di Muricce, 3ª ediz. riveduta ed ampliata dell'autore, di pag. XII-210 . . 1 50
Agronomia e agricoltura moderna, di G. Soldani, 3ª ediz. di pag. VIII-416 con 134 inc. e 2 tavole cromolit. 3 50
Agrumi (Coltivazione, malattie e commercio degli), di A. Aloi, con 22 inc. e 5 tav. cromolit., pag. XII-238 3 50
Alchimia — *vedi* Occultismo.
Alcool (Fabbricazione e materie prime), di F. Cantamessa, di pag. XII-307, con 24 incisioni . . . . . 3 —
Alcool industriale, di G. Ciapetti. Produzione dell'alcole industriale, applicazione dell' alcole denaturato alla fabbricazione dell'aceto e delle vinacce, alla produzione della forza motrice, al riscaldamento, ecc., con 105 illustraz., di pag. XII-262 . . . . 3 —
— *vedi* Birra - Cantiniere - Cognac - Distillazione - Enologia - Liquorista - Mosti - Vino.
Alcoolismo (**L'**) di G. Allievi, di pag. XI-221 . . . 2 —
Algebra complementare, del Prof. S. Pincherle:
Parte I. *Analisi Algebrica,* 2ª ediz. di p. VIII-174 . 1 50
Parte II. *Teoria delle equazioni,* pag. IV-169, 4 inc. 1 50
Algebra elementare, del Prof. S. Pincherle, 9ª ediz. riveduta di pag. VIII-210 e 2 incisioni nel testo . . 1 50
— **(Esercizi di),** del Prof. S. Pincherle, di pag. VIII-135. 1 50
Alighieri Dante — *vedi* Dantologia - Divina commedia.
Alimentazione, di G. Strafforello, di pag. VIII-122 . 2 —
Alimentazione del bestiame, dei Proff. Menozzi e Niccoli, di pag. XVI-400 con molte tabelle . . . . . 4 —
Alimenti — *vedi* Adulterazione degli - Aromatici - Conserv. sostanze aliment. - Bromatologia - Gastronomo - Pane.
Allattamento — *vedi* Nutrizione del bambino.
Alligazione (Tavole di) **per l'oro e per l'argento** con numerosi esempi pratici per il loro uso, F. Buttari, di pag. XII-220 . . . . 2 50
— *vedi* Leghe — Metalli preziosi.
Alluminio (L'), di C. Formenti di pag. XXVIII-324 . . 3 50
Aloe — *vedi* Prodotti agricoli.
Alpi (Le), di J. Ball, trad. di I. Cremona, pag. VI-120 . 1 50
Alpinismo, di G. Brocherel, di pag. VIII-312 . . . 3 —
— *vedi* Dizionario alpino — Infortuni — Prealpi.
Amalgame — *vedi* Alligazione — Leghe metalliche.
Amatore (L') **di oggetti d'arte e di curiosità,** di L. De Mauri, di 600 pag. adorno di numerose incis. e mar-

L. c

che. Contiene le materie seguenti: Pittura - Incisione - Scoltura in avorio - Piccola scoltura - Vetri - Mobili - Smalti - Ventagli - Tabacchiere - Orologi - Vasellame di stagno - Armi ed armature - (è in lavoro la 2ª edizione).

Amianto — *vedi* Imitazioni

Amido — *vedi* Fecola.

Amministrazione pubblica — *vedi* Asssicurazione - Assicurazione e stima danni - Beneficenza - Bonifiche - Catasto - Codici - Conciliatore - Contabilità - Cooperative rurali - Cooperazione - Debito pubblico - Diritti e doveri dei cittadini - Diritto amministrativo - Enciclopedia amministrativa - Esattore comunale - Estimo - Fognatura cittadina - Giustizia amministr. - Igiene - Imposte dirette - Infortuni sul lavoro - Interesse e sconto - Ipoteche - Lavoro donne e fanciulli - Legge comunale - Legge s. sanità e sicurezza pubblica - Legge sulle tasse di registro e bollo - Legislazione sanitaria - Legislazione rurale - Logismografia - Municipalizzazione d. servizi pubblici - Notaio - Paga giornaliera - Polizia sanitaria - Posta - Proprietario di case - Ragioneria - Ricchezza mobile - Scienza d. finanze - Scritture d'affari - Socialismo - Società - Sociologia generale - Statistica - Strade ferrate - Testamenti - Trasporti e tariffe - Valori pubbl.

Ampelografia descrizione delle migliori varietà di viti per uve da vino. uve da tavola, porta-innesti e produttori diretti, di G. MOLON, 2 volumi inseparabili, di pag. XLIV-1243 in busta. . . . . 18 —

— *vedi* Viticoltura.

Anagrammi — *vedi* Enimmistica.

Analisi chimica qualitativa di sostanze minerali e organiche e ricerche tossicologiche, ad uso dei laboratori di chimica in genere e in particolare delle Scuole di Farmacia, di P. E. ALESSANDRI, 2ª ediz. di pag. XII-384, con 14 inc. e 5 tav. . . . . 5 —

Analisi di sostanze alimentari — *vedi* Bromatologia - Chimica applicata all'Igiene.

Analisi delle Orine di F. JORIO (vedi Urina).

— *vedi* Chimica clinica.

Analisi del vino, ad uso dei chimici e dei legali, di M. BARTH, traduz. di E. COMBONI, 2ª ediz. di p. XVI-140 2 —

Analisi volumetrica applicata ai prodotti commerciali e industriali di P. E. ALESSANDRI di pag. X-342, con incis. 4 50

Ananas — *vedi* Prodotti agricoli.

Anatomia e fisiologia comparate, di R. BESTA, di pag. VII-218 con 34 inc. 1 50

Anatomia microscopica (Tecnica di), di D. CARAZZI, di pag. XI-211, con 5 inc. 1 50

Anatomia pittorica, di A. LOMBARDINI, 2ª ed. di pag. VIII-168, con 53 inc. (esaurito, è in lavoro la 3ª ediz.).

Anatomia topografica, di C. FALCONE. 2ª ediz. rifatta di pag. XI.625, con 48 inc. 6 50

L. c.

Anatomia vegetale, di A. Tognini, pag. xvi-274, 41 inc. 3 —

Animali da cortile. Polli, faraone, tacchini, fagiani, anitre, oche, cigni, colombi, tortore, conigli, cavie, furetto, di F. Faelli, di pag. xviii-372 con 56 inc. e 19 tav. color. 5 50

Animali domestici — *vedi* Abitazioni degli — Cane — Cavallo — Maiale — Razze bovine, ecc.

Animali (Gli) **parassiti dell'uomo**, di F. Mercanti, di pag. iv-179 con 33 inc. 1 50

ntichità greche, pubbliche, sacre e private di V. Inama di pag. xv-224, con 19 tavole e 8 incisioni 2 50

Antichità private dei romani, di N. Moreschi, 3ª ed. rifatta del Manuale di W. Kopp, pag. xvi-181, 7 inc. 1 50

Antichità pubbliche romane, di J. G. Hubert, rifacimento delle antichità romane pubbliche, sacre e militari di W. Kopp, trad. di A. Wittgens, di pag. xiv-324 3 —

Antisettici — *vedi* Medicatura antisettica.

Antologia stenografica, di E. Molina (sistema Gabelsberger-Noe), di pag. xi-199 . . . . 2 —

Antropologia, di G. Canestrini, 3ª ediz., di pag. vi-239 con 21 inc. 1 50

Antropologia criminale (I principi fondamentali della) Guida per i giudizi medico-forensi nelle quistioni di imputabilità di G. Antonini, di pag. viii-167 . . . 2 —

— *vedi* Psichiatria.

Antropometria, di R. Livi, di pag. viii-237 con 32 inc. 2 50

Apicoltura, di G. Canestrini, 5ª ed. riveduta di pag. iv-215 con 21 inc. . . . . 2 —

Arabo parlato (L') in Egitto, grammatica, frasi, dialoghi e raccolta di oltre 6000 vocaboli di A. Nallino, pag. xxviii-386 . . . . 4 —

Araldica (Grammatica), ad uso degli italiani, compilata da F. Tribolati, 4ª edizione con introduzione ed agg. di G. Crollalanza, pag. xi-187, con 274 inc. 2 50

— *vedi* Vocabolario araldico.

Araldica Zootecnica di E. Canevazzi. I libri geologici degli animali domestici, Stud - Herd - Flock - Books. 1904, di pag. xix-322, con 43 inc. 3 50

Aranci — *vedi* Agrumi.

Archeologia - *vedi* Amatore oggetti d'arte - Antichità greche - Antichità private dei romani - Id. pubbliche romane - Armi antiche - Araldica - Architettura - Atene - Atlante numismatico - Majoliche - Mitologia - Monete greche - Id. papali - Id. romane - Numismatica - Ornatista - Paleografia - Paleoetnologia - Pittura italiana - Ristauratore dipinti - Scoltura - Storia dell'arte - Topografia di Roma - Vocabolarietto numismatico Vocabol. araldico.

Archeologia e storia dell'arte greca, di I. Gentile, 3ª ediz. rifatta da S. Ricci di pag. xlviii-270 con 215 tav. aggiunte e inserite nel testo 11 50

— Il solo testo a parte 9 50

L. c.

Archeologia e storia dell'arte italica, etrusca e romana. Un vol. di testo di p. XXXIV-846 con 96 tav. e 1 vol. Atlante di 79 tav. a cura di S. RICCI 7 50

Architettura (Manuale di) **italiana**, antica e moderna, di A. MELANI, 4ª ed. 136 tav. e 67 inc.. p. XXV-559 7 50

Archivista (L') di P. TADDEI. Manuale teorico-pratico, di pag. VIII-486 con modelli e tabelle . . . . . . 6 —

Arenoliti — *vedi* Mattoni e pietre.

Argentina (La Repubblica) nelle sue fasi storiche e nelle sue attuali condiz. geografiche, statistiche ed econom. di EZIO COLOMBO, di pag. XII-330 con 1 tav. e 1 carta. . 3 50

Argentatura — *vedi* Galvanizzazione - Galvanoplastica - Galvanostegia - Metallocromia - Metalli preziosi - Piccole industrie.

Argento — *vedi* Alligazione metalli preziosi — Leghe.

Aritmetica pratica, di F. PANIZZA, 2ª ediz. riveduta, di pag. VIII-188 . . . . 1 50

Aritmetica razionale, di F. PANIZZA, 4ª ediz. riveduta di pag. XII-210 . . . . 1 50

— (**Esercizi di**), di F. PANIZZA, di pag. VIII-150 . . . 1 50

Aritmetica (L') **e Geometria dell'operaio**, di E. GIORLI di pag. XII-183, con 74 figure. . . . . 2 —

Armi antiche (Guida del raccoglitore e dell'amatore di) J. GELLI, di pag. VIII-389, con 9 tavole, 432 incis. e 14 tavole di marche 6 50

— *vedi* Amatore d'oggetti d'arte — Storia d. arte milit.

Armonia, di G. BERNARDI, con prefazione di E. Rossi di pag. XX-338 . . . . 3 50

Aromatici e Nervini nell'alimentazione. I condimenti, l'alcool (Vino, Birra, Liquori, Rosolii, ecc.). Caffè, Thè, Matè, Guarana, Noce di Kola, ecc. — Appendice sull'uso del Tabacco da fumo e da naso, di A. VALENTI 3 —

Arte e tecnica del canto, di G. MAGRINI, di pag. VI-160. 2 —

Arte del dire (L') di D. FERRARI. Manuale di rettorica per lo studente delle Scuole secondarie. 6ª ed. corr. (11, 12 e 13 migliaio), p. XVI-358 e quadri sinottici 1 50

Arte della memoria (L') sua storia e teoria (parte scientifica). Mnemotecnia Triforme (parte pratica) di B. PLEBANI, di pag. XXXII-224 con 13 illustr. 2 50

Arte militare — *vedi* Armi antiche - Esplodenti - Nautica - Storia dell'

Arte mineraria — *vedi* Miniere (Coltivazione delle) - Zolfo.

Arti (Le) **grafiche fotomeccaniche**, ossia la Eliografia nelle diverse applicaz. (Fotozincotipia, fotozincografia, fotocromolitografia, fotolitografia, fotocollografia, fotosilografia, tricromia, fotocollocromia, ecc. con un Dizionarietto tecnico e un cenno storico sulle arti grafiche; 3ª ediz., di pag. XVI-238 . . . . 2 —

L. c.

ciale marittimo inglese-italiano. Ragguaglio dei pesi e misure inglesi con le italiane, pag. xv-496, 25 fig. 5 50

Avicoltura — *vedi* Animali da cortile - Colombi - Pollicolt.

Avvelenamenti - *vedi* Analisi chim. - Chimica legale - Veleni.

Bachi da seta, di F. NENCI. 3ª ediz. con note ed aggiunte, di pag. XII-300, con 47 incis. e 2 tav. . . . 2 50

Balbuzie (Cura della) **e dei difetti di pronunzia**, di A. SALA, di pag. VIII-214 e tavole. . . . . 2 —

Balistica — *vedi* Armi antiche - Esplodenti - Pirotecnia - Storia dell'arte miltare.

Ballo (Manuale del), di F. GAVINA, 2ª Ediz. di pag. VIII-265, con 103 fig.: Storia della danza - Balli girati - Cotillon - Danze locali - Feste di ballo - Igiene del ballo 2 50

Bambini — *vedi* Balbuzie - Malattie d'infanzia - Nutrizione dei bambini - Ortofrenia - Rachitide.

Barbabietola (La) da zucchero. Cenni storici, caratteri botanici, clima, lavoraz. del terreno, concimaz. rotazione, semina, cure durante la vegetaz., raccolta e conservaz., produz. del seme, malattie, fabbricaz. di zucchero, di A. SIGNA, p. XII-225, 29 inc. e 2 tav. color. 2 50

— *vedi* Zucchero.

Batteriologia, di G. CANESTRINI, 2ª ed. pag. x-274 37 inc. 1 50

Beneficenza (Manuale della), di L. CASTIGLIONI, con appendice sulle contabilità delle istituzioni di pubblica beneficenza, di G. ROTA, di pag. XVI-340 . . 3 50

Belle arti *vedi* — Amatore oggetti d'arte - Anatomia pittorica - Armi antiche - Archeologia dell'arte greca - Id. dell'arte romana - Architettura - Arti grafiche - Calligrafia - Colori e pittura - Decoraz. ed industrie artistiche - Disegno - Gramm. del disegno - Fiori artificiali - Fotosmaltografia - Gioielleria - Litografia - Luce e colori - Majoliche e porcellane - Marmista - Monogrammi - Ornatista - Pittura italiana - Pittura ad olio - Prospettiva - Ristauratore dipinti - Scolt. - Stor dell'arte - Teoria delle ombre.

Bestiame (Il) e l'agricoltura in Italia, di F. ALBERTI 2ª ediz. rifatta di U. BARPI di pag. XII-322, con 47 tavole e 118 figure 4.50

— *vedi* Abitazioni di animali - Alimentazione d. bestiame - Araldica zootecnica - Cavallo - Coniglicoltura - Igiene veterinaria - Majale - Malattie infettive - Polizia sanitaria - Pollicoltura - Razze bovine - Veterinario - Zoonosi - Zootecnia.

Biancheria (Disegno, taglio e confezione di), Manuale teorico pratico ad uso delle scuole normali e professionali femminili e delle famiglie, di E. BONETTI, 3ª ediz. coll'aggiunta di nuove tavole e prospetti per l'ingrandimento e l'impicciolimento dei modelli, di pag. xx-234, 60 tavole e 6 prospetti . . . . 4 —

Bibbia (Man. della), di G. M. ZAMPINI, di pag. XII-308. 2 50

Bibliografia, di G OTTINO, 2ª ed., pag. IV-166, 17 incis. 2 —

— *vedi* Atene - Dizionario bibliografico.

'bliotecario (Manuale del), di G. PETZHOLDT, tradotto

L. c.

sulla 3ª ediz. tedesca, per cura di G. BIAGI e G. FUMAGALLI, di pag. XX-334-CCXIII 7 50
— *vedi anche* Dizionario bibliografico - Paleografia.

Biliardo (Il giuoco del), di J. GELLI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-175, con 80 illustrazioni 2 50

Biografia — *vedi* Cristoforo Colombo - Dantologia - Diz. biografico - Manzoni - Napoleone I - Omero - Shakespeare.

Biologia animale. Zoologia generale e speciale per Naturalisti, Medici e Veterinari, di G. COLLAMARINI, di di pag. X-426 con 23 tavole . . . . 3 —

Birra (La). Malto, luppolo, fabbricazione, analisi, di S. RASIO e di F. SAMARANI di pag. 279 con 25 incis. . 3 50

Bollo — *vedi* Codice del Bollo - Leggi registro e bollo.

Bolloneria — *Vedi* Stampaggio a caldo.

Bonificazioni (Manuale amministrativo delle), di G. MEZZANOTTE, di pag. XII-294 . . . . 3 —

Borsa (Operaz. di) — *vedi* Debito pubbl. - Valori pubblici.

Boschi — *vedi* Consorzi — Selvicoltura.

Botanica, di I. D. HOOKER, traduzione di N. PEDICINO 4ª ediz., di pag. VIII-134, con 68 incis. 1 50
— *vedi* Dizionario di botanica.
— *vedi anche* Ampelografia - Anatomia vegetale - Fisiologia vegetale - Floricoltura - Funghi - Garofano - Malattie crittogamiche - Orchidee - Orticoltura - Piante e fiori - Pomologia - Rose - Selvicoltura - Tabacco - Tartufi.

Botti — *vedi* Enologia.

Bromatologia. Dei cibi dell'uomo secondo le leggi dell'igiene, di S. BELLOTTI, di pag. XV-251, con 12 tav. 3 50

Bronzatura — *vedi* Metallocromia - Galvanostegia.

Bronzo — *vedi* Fonditore - Leghe metalliche - Operaio.

Buddismo, di E. PAVOLINI, di pag. XVI-164 . . . 1 50

Buoi — *vedi* Bestiame — Razze bovine

Burro — *vedi* Latte - Caseificio.

Caccia — *vedi* Cacciatore - Falconiere.

Cacciatore (Manuale del), di G. FRANCESCHI, 3ª ediz. rifatta, di pag. IX-344 con 48 incis. 2 50

Cacio — *vedi* Bestiame - Caseificio - Latte, ecc.

Caffè — *vedi* Prodotti agricoli.

Caffettiere e sorbettiere (Manuale del). Caffè, Thè, Liquori, Limonate, Sorbetti, Granite, Marmellate, Conservazione dei frutti, Ricette per feste da ballo, Vini Cioccolata di L. MANETTI, di pag. XII-311, con 65 inc. 2 50

Calcestruzzo (Costruzioni in) **ed in cemento armato,** di G. VACCHELLI, 3ª ediz. , pag. XVI-383, con 270 fig. 4 —
— *vedi anche* Capomastro - Mattoni e pietre.

Calci e Cementi (Impiego delle), di L. MAZZOCCHI, 2ª edizione riveduta e corretta, pag. XII-225, con 56 fig. 2 50

Calcolazioni mercantili e bancarie — *vedi* Conti e calcoli fatti - Interesse e sconto - Prontuario del ragioniere - Monete inglesi.

Calcoli fatti — *vedi* Conti e

L. c.

alcolo infinitesimale di E. PASCAL:
I. *Calcolo differenziale*. 2ª ediz. rived., di pag. XII-311, 10 incis. . . . . 3 —
II. *Calcolo integrale*, 2ª ediz. di pag. VIII-329 . 3 —
III. *Calcolo delle variazioni e calcolo delle differenze finite*, di pag. XII-300 . . . . 3 —
— **(Esercizi di)** (calcolo differenziale e integrale), di E. PASCAL, di pag. XX-372 . . . . 3 —
— *vedi* Determinanti - Funzioni analitiche - Funzioni ellittiche - Gruppi di trasformaz. - Matematiche superiori.
Calderaio pratico e costruttore di caldaie a vapore, e di altri apparecchi industriali, di G. BELLUOMINI, di pag. XII-248, con 220 incis.. . . . . 3 —
— *vedi anche* Locomobili — Macchinista.
Calligrafia (Manuale di), di R. PERCOSSI. (in lavoro).
Calore (Il) di E. JONES, trad. di U. FORNARI, di pag. VIII-296, con 98 incis. . . . . 3 —
Camera di Consiglio Civile, di A. FORMENTANO. I. Norme generali sul procedimento in Camera di Consiglio. II. Giurisdizione volontaria. III. Affari di giurisdizione contenziosa da trattarsi senza contradditore. IV. Materie da trattarsi in Cam. di Consiglio, pag. XXXII-574 4 50
Campicello (Il) **scolastico.** Impianto e coltivazione. Manuale di agricoltura pratica per i Maestri di E. AZIMONTI e C. CAMPI, di pag. XI-175, con 126 incis. . 1 50
Cancelliere — *vedi* Conciliatore
Candeggio — *vedi* Industria tintoria.
Candele — *vedi* Industria stearica.
Cane (Il) Razze mondiali, allevamento, ammaestramento, malattie con una appendice: I cani della spedizione polare di S. A. R. il Duca degli Abruzzi, di A. VECCHIO 2ª ediz. di pag. XVI-442, con 152 inc. e 63 tav. . 7 50
Cani e gatti, di F. FAELLI (In lavoro).
Canottaggio (Manuale di), del Cap. G. CROPPI, di pag. XXIV-456 con 387 incis. e 91 tav. cromolit. 7 50
Cantante (Man. del), di L. MASTRIGLI, di pag. XII-132 2 —
Cantiniere (Il). Manuale di vinificazione per uso dei cantinieri, di A. STRUCCHI, 3ª ediz. con 52 incis. e una tabella per la riduz. del peso degli spiriti, p. XVI-256 2 —
Canto (Il) **nel suo meccanismo,** di P. GUETTA, di pag. VIII-253, con 24 incis. 2 50
— *vedi anche* Arte del canto - Cantante.
Capitalista (Il) nelle Borse e nel Commercio dei valori pubblici. Guida finanziaria per le Borse, Banche, Industrie, Società per azioni e Valori pubblici di F. PICCINELLI, di pag. LI-1172 . . . . 12 00
Capomastro (Man. del). Impiego e prove dei materiali idraulici-cementizii, con riassunto della legge per gli infortuni degli operai sul lavoro e delle disposizioni

L. c.

di legge sui fabbricati, di G. RIZZI, pag. XII-263, con 19 incis. intercalate nel testo 2 50

Cappellaio (Man. d.), di L. RAMENZONI, p. XII-222, 68 inc. 2 50

Capre – *vedi* Razze bovine, ecc.

Carboni fossili inglesi. Coke. Agglomerati di G. GHERARDI, pag. XII-586 con fig. nel testo e cinque carte geografiche dei bacini carboniferi inglesi . . . . 6 —

Carburo di calcio — *vedi* Acetilene.

Carta (Ind. della), L. SARTORI, p. VII-326, 106 inc. e 1 tav. 5 50

Carte fotografiche, Preparazioni e trattamento di L. SASSI, pag. XII-353. . . . . 3 50

Carte geografiche – *vedi* Atlante

Cartografia (Manuale teorico-pratico della), con un sunto della storia della Cartografia, di E. GELCICH, di pag. VI-257, con 36 illustrazioni . . . . 2 —

Casa (La) **dell'avvenire**, di A. PEDRINI. Vade-mecum dei costruttori, dei proprietari di case e degli inquilini. Raccolta ordinata di principî d'ingegneria sanitaria, domestica ed urbana, per la costruzione di case igieniche, civili, operaie e rustiche e per la loro manutenzione, di pag. XV;468, con 213 incis. . . . 4 50

Case coloniche — *vedi* Fabbricati rurali.

Case operaie — *vedi* Abitazioni popolari.

Caseificio, di L. MANETTI, 4ª ediz. nuovamente ampliata da G. SARTORI, di pag. XII-280, con 49 inc. . 2 —

— *vedi* Bestiame — Latte, cacio e burro.

Catasto (Il nuovo) **italiano**, di E. BRUNI, pag. VII-346. 3 —

Cavallo (Il), di C. Volpini, 3ª ediz. rived. ed ampliata di pag. VI-233 con 48 tavole 5 50

Cavalli — *vedi* Razze bovine, equine, ecc.

Cavi telegrafici sottomarini. Costruzione, immersione, riparazione di E. JONA, di pag. XVI-388, 188 fig. e 1 carta delle comunicazioni telegrafiche sottomarine . 5 50

Cedri — *vedi* Agrumi.

Celerimensura e tavole logaritmiche a quattro decimali, di F. BORLETTI, di pag. VI-148 con 29 incisioni . . 3 50

Celerimensura (Manuale e tavole di). di G. ORLANDI, di pag. 1200, con quadro generale d'interpolazioni . 18 —

Celluloide — *vedi* Imitazioni

Cementazione — *vedi* Tempera.

Cemento armato — *vedi* Calcestruzzo - Calci e cementi - Mattoni

Ceralacca — *vedi* Vernici e lacche.

Ceramiche — *vedi* Maioliche e porcellane - Fotosmaltogr.

Chimica, di H. E. ROSCOE, 6ª ediz. rifatta da E. RICCI, di pag. XII-231, con 47 incis. 1 50

Chimica agraria, di A. ADUCCO, 2ª ediz. di pag. XII-515 3 50

— *vedi* Concimi - Fosfati - Humus - Terreno agrario.

Chimica analitica (Elementi scientifici di), di W. OSTWALD, trad. del Dott. BOLIS, di pag. XVI-234 . . . 2 50

Chimica applicata all'igiene. Ad uso degli Ufficiali sanitari, Medici, Farmacisti, Commercianti, Laboratori

L. c.

d'igiene, di merciologia, ecc., di P. E. ALESSANDRI, di pag. xx-515, con 49 inc. e 2 tav. 5 50
Chimica clinica, di R. SUPINO, di pag. XII-202. . . . 2 —
Chimica cristallografica — *vedi* Cristallografia - Fisica cristallografica.
Chimica delle sostanze coloranti, di A. PELLIZZA (Teoria ed applic. alla tintura delle fibre tessili, pag. VIII-480 5 50
Chimica fotografica. Prodotti chimici usati in fotografia e loro proprietà, di R. Namias di pag. VIII-230 . . 2 50
Chimica legale (Tossicologia), di N. VALENTINI, p. XII-243 2 50
Chimico (Manuale del) **e dell'Industriale**. Raccolta di tabelle, dati fisici e chimici e di processi d'analisi tecnica, ad uso dei chimici analitici e tecnici, dei direttori di fabbriche, ecc. di L. GABBA, 4ª ediz. arricchita delle tavole analitiche di H. WILL, di p. xx-534, 12 tavole 5 50
— *vedi* Analisi volumetrica — Soda caustica.
Chiromanzia e tatuaggio, note di varietà, ricerche storic. e scientif., G. L. CERCHIARI, p. xx-323, 29 tav., 82 inc. 4 50
Chirurgia operativa (Man. di), di R. STECCHI e A. GARDINI, di pag. VIII-322, con 118 inc. . . . . . 3 —
Chitarra (Manuale pratico per lo studio della), di A. PISANI, di pag. XVI-116, 36 fig. e 25 esempi di musica 2 —
Ciclista, di I. GHERSI, 2ª ed. rifatta, pag. 244, 147 incis. 2 50
Cinematografo (Il) **e i suoi accessori**. Lanterna magica e apparecchi affini. Vocabolario delle proiezioni, di G. RE, di pag. XV-182, con 73 incisioni . . . . . 2 —
Città (La) **moderna**, ad uso degli Ingegneri, dei Sanitari, ecc. di A. PEDRINI, p. xx-510, 194 fig. e 19 tav. 6 —
Classificazione delle scienze, di C. TRIVERO, p. XVI-292 3 —
Climatologia, di L. DE MARCHI, pag. x-204 e 6 carte . 1 50
Cloruro di sodio — *vedi* Sale.
Codice cavalleresco italiano (Tecnica del duello), di J. Gelli 10ª ediz. riveduta, di pag. XVI-275 . . . . . 2 50
— *vedi* Duellante.
Codice del bollo (Il). Nuovo testo unico commentato colle risoluzioni amministrative e le massime di giurisprudenza, ecc., di E. CORSI, di pag. c-564 . . . 4 50
— *vedi* Leggi registro e bollo.
Codice civile del regno d'Italia, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale, corredato di richiami e coordinato da L. FRANCHI, 3ª ediz. di pag. 232 . . . 1 50
Codice di commercio, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale da L. FRANCHI, 4ª ediz. di pag. IV-158. 1 50
Codice doganale italiano con commento e note, di E. BRUNI, di pag. xx-1078 con 4 inc. 6 50
Codice (Nuovo) **dell' Ingegnere Civile-Industriale, Ferroviario, Navale, Elettrotecnico**. Raccolta di Leggi, Regol. e Circol. con annotaz. di E. NOSEDA, di p. XII-1341 12 50
Codice di marina mercantile, secondo il testo ufficiale, di L. FRANCHI, 3ª ediz. di pag. IV-290 . . . . . 1 50

L. c.

Codice metrico internazionale — *vedi* Metrologia.

Codice penale e di procedura penale, secondo il testo ufficiale, di L. FRANCHI, 3ª ediz., di pag. IV-230 . 1 50

Codice penale per l'esercito e penale militare marittimo secondo il testo ufficiale di L. FRANCHI 2ª ediz. di p. 179 1 50

Codice del perito misuratore. Raccolta di norme e dati pratici per la misurazione e la valutazione d'ogni lavoro edile, preventivi, liquidazioni, collaudi, perizie, arbitramenti, di L. MAZZOCCHI e E. MARZORATI, 2ª ediz. di pag. VIII-530. con 169 illustr.. . . . . . 5 50

Codice di procedura civile, accuratamente riscontrato sul testo ufficiale da L. FRANCHI, 2ª ediz. di p. 167 1 50

Codice sanitario — *vedi* Legislazione sanitaria.

Codice del teatro (Il). Vade-mecum legale per artisti lirici e drammatici, impresari, capicomici, direttori d'orchestra, direzioni teatrali, agenti teatrali, gli avvocati e per il pubblico. di N. TABANELLI, pag. XVI-328 3 —

Codici e leggi usuali d'Italia, riscontrati sul testo ufficiale e coordinati e annotati da L. FRANCHI, raccolti in cinque grossi volumi legati in pelle.

Vol. I. Codice civile - di procedura civile - di commercio - penale - procedura penale - della marina mercantile - penale per l'esercito - penale militare marittimo (*otto codici*) 2ª edizione, di pag. VIII-1261 . . . . 8 50

Vol. II. Leggi usuali d'Italia. Raccolta coordinata di tutte le leggi speciali più importanti e di più ricorrente ed estesa applicazione in Italia; con annessi decreti e regolam. e disposte secondo l'ordine alfabetico delle materie. 2ª ediz. riveduta ed aumentata, *divisa in 3 parti.*

Parte I. Dalla voce « Abbordi di mare » alla voce « Dominii collettivi », di pag. VIII-1456 a due colonne 12 50

Parte II. Dalla voce « Ecclesiastici » alla voce « Polveri piriche » pag. 1459 a 1855 due colonne . 12 50

Parte III. Dalla voce « Posta » alla voce « Zucchero » pag. 2857 a 4030, a due colonne. 12 50

Vol. III. Leggi e convenzioni sui diritti d'autore, raccolta generale delle leggi italiane e straniere di tutti i trattati e le convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati 2ª ediz. di pag. VII-617 . . . 6 50

Vol. IV. Leggi e convenzioni sulle privative industriali. Disegni e modelli di fabbrica. Marchi di fabbrica e di commercio. Legislazione italiana. Legislazioni straniere. Convenzioni esistenti fra l'Italia ed altri Stati, di pag. VIII-1007 . . . . 8 50

Cognac (Fabbricazione del) **e dello spirito di vino e distillazione delle fecce e delle vinacce,** di DAL PIAZ,

L. c.

con note di G. PRATO, 2ª ed. con aggiunte e correz. di F. A. SANNINO, di pag. XII-210, con 38 inc. . . 2 —
— *vedi* Alcool - Distillazione - Enologia - Liquorista.
Coleotteri italiani, di A. GRIFFINI (Entomologia. I), di pag. XVI-334, con 215 inc. . . . . 3 —
— *vedi* Ditteri - Imenotteri - Insetti — Lepidotteri.
Collezioni — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte - Amatore di maioliche - Armi antiche - Autografi - Dizionario filatelico.
Colombi domestici e colombicoltura, di P. BONIZZI, 2ª edizione rifatta a cura della Società Colombofila fiorentina, di pag. X-211, con 26 figure . . . . . . 2 —
Colorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.
Colori (La scienza dei) **e la pittura,** di L. GUAITA. 2ª ed. ampliata, di pag. IV-368 . . . . 3 —
Colori e Vernici. Manuale ad uso dei Pittori, Verniciatori, Miniatori, Ebanisti e Fabbricanti di colori e vernici, di G. GORINI, 4ª ediz. per cura di G. APPIANI, di pag. XV-301 con 39 incis. . . . . 3 —
Commedia — *vedi* Letteratura drammatica.
Commerciante (Manuale del) ad uso della gente di commercio e Istit. d'Istruz. comm., corredato di oltre 200 moduli, quadri esempi, tavole dimostr. e prontuari, di C. DOMPÈ, 2ª ediz. riveduta ed ampliata di p. X-649 . 6 50
Commercio (Storia del), di R. LARICE, di pag. XVI-336 3 —
— *vedi* Usi mercantili.
Commissario giudiziale — *vedi* Curatore dei fallimenti.
Compensazione degli errori con speciale applicazione ai rilievi geodetici, di F. CROTTI, pag. IV-160 . . . 2 —
Complementi di matematica — *vedi* Matematica.
Computisteria, di V. GITTI: Vol. I. Computisteria commerciale, 6ª ediz., di pag. VIII-184 . . . . 1 50
Vol. II. Computist. finanziaria, 4ª ediz., p. VIII-156 1 50
Computisteria agraria, di L. PETRI, 3ª ediz. riveduta di pag. VIII-210 e 2 tabelle. 1 50
— *vedi* Contabilità - Ragioneria - Logismografia.
Concia delle pelli ed arti affini, di G. GORINI, 3ª ed. rifatta da G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI, di pag. IX-210 . 2 —
Conciliatore (Manuale del), di G. PATTACCINI. Guida teorico-pratica con formulario completo pel Conciliatore, Cancelliere, Usciere e Patrocinatore di cause, 4ª ediz. ampliata, di pag. XII-461 . . . . 3 —
Concimi, di A. FUNARO. 2ª ediz. di pag. XII-266. . . 2 —
Concimi fosfatici — *vedi* Fosfati - Chimica agraria - Humus - Terreno agrario.
Concordato preventivo — *vedi* Curatore di fallimenti.
Confettiere — *vedi* Pasticcere e confettiere moderno.
Coniglicoltura pratica, di G. LICCIARDELLI, 2ª ediz., di pag. VIII-248, con 53 incisioni e 12 tavole in tricr. 2 50
Conservazione delle sostanze alimentari, di G. GORINI, 4ª ediz. intieramente rifatta da G. B. FRANCESCHI e G. VENTUROLI (In lavoro).

L. c.

Conservazione dei prodotti agrari, di C. MANICARDI, di pag. xv-220, con 12 incis. 2 50

Consigli pratici — *vedi* Caffettiere - Ricettario domestico - Industriale - Soccorsi d'urgenza.

Consorzi di difesa del suolo (Manuale dei). Sistemazioni idrauliche. Culture silvane e rimboschimento, di A. RABBENO, di pag. VIII-296 . . . . 3 —

Contabilità comunale, secondo le nuove diposiz. legislative e regolamentari di A. DE BRUN. (2ª ediz. rifatta, ed ampliata di pag. XVI-650 . . . . 5 50

— *vedi* Enciclopedia amministrativa.

Contabilità domestica. Nozioni amministrativo-contabili ad uso delle famiglie e delle scuole femminili, di O. BERGAMASCHI, di pag. XVI-186 . . . . 1 50

Contabilità generale dello Stato, di E. BRUNI, 2ª ediz. rifatta, pag. XVI-420 . . . . 3 —

Contabilità d. istituz. pubbl. beneficenza — *vedi* Beneficenza.

Conti e Calcoli fatti, di I. GHERSI, 93 tabelle e istruzioni pratiche sul modo di usarle, di pag. 204. . . 2 50

Contrappunto, di G. G. BERNARDI, di pag. XVI-238 . . 3 50

Contratti agrari — *vedi* Mezzeria.

Conversazione italiana e tedesca (Manuale di), ossia guida completa per chiunque voglia esprimersi con proprietà e speditezza in ambe le lingue, e per servire di *vade mecum* ai viaggiatori, di A. FIORI, 8ª ediz. rifatta da G. CATTANEO, pag. XIV-400 . . . . . . 3 50

Conversazione italiana-francese — vedi *Dottrina popolare - Fraseologia.*

Cooperative rurali, di credito, di lavoro, di produzione, di assicurazione, di mutuo soccorso, di consumo, di acquisto di materie prime, di vendita di prodotti agrari. Scopo, costituzione, norme giuridiche, tecniche, amministr. comput. di V. NICCOLI, pag. VIII-362 3 50

Cooperazione nella sociologia e nella legislazione, di F. VIRGILII, pag. XII-228 . . . . 1 50

Correnti elettriche alternate semplici, bifasi e trifasi. Manuale pratico per lo studio, costruzione ed esercizio degli impianti elettrici, di A. MARRO, di pagine XIV-615-LXIV, con 218 incis. e 46 tabelle 6 50

Corrispondenza commerciale poliglotta, di G. FRISONI compilata su di un piano speciale nelle lingue italiana francese, tedesca inglese e spagnuola.

I. — **PARTE ITALIANA**: *Manuale di Corrispondenza Commerciale italiana* corredato di facsimili dei vari documenti di pratica giornaliera, seguito da un GLOSSARIO delle principali voci ed espressioni attinenti al Commercio, agli Affari marittimi, alle Operazioni bancarie ed alla Borsa, ad uso delle Scuole, dei Banchieri, Negozianti ed Industriali di qualunque nazione, che desiderano abilitarsi alla moderna terminologia e nella corretta fraseologia mercantile italiana, 2ª ed. di pag. XX-478 4 —

L. c.

ciamento delle curve in qualunque sistema e in qualsiasi caso particolare, nelle ferrovie, strade e canali, di C. FERRARIO, pag. XI-264, con 94 incis. . . 3 50

Curve graduate e raccordi a curve graduate, con speciale riferimento alle pratiche importanti e nuove applicazioni nei tracciamenti ferroviari, di C. FERRARIO, in continuazione al Manuale « Curve circolari e raccordi a curve circolari », dello stesso autore, di pag. XX-251, con 25 tavole e 41 figure 3 50

Danese (Lingua) — *vedi* Grammatica — Letteratura.

Dante Alighieri — *vedi* Divina Commedia.

Dantologia, di G. A. SCARTAZZINI. Vita e opere di Dante Alighieri, 3ª ed. con ritocchi e agg. di N. SCARANO 3 —

Datteri — *vedi* Prodotti agricoli.

Debito (Il) **pubblico italiano**. Regole e modi per le operazioni sui titoli che lo rappresentano, di F. AZZONI, pag. VIII-376 . . . . 3 —

— *vedi* Notaio - Valori pubblici.

Decorazione dei metalli — *vedi* Metallocromia.

Decorazioni del vetro — *vedi* Specchi - Fotosmaltologia - Vetro.

Decorazioni e industrie artistiche, di A. MELANI, due vol., pag. XX-460, 118 inc. (esaurito, la 2ª ed. è in lav).

Denti — *vedi* Igiene della bocca.

Destrina — *vedi* Fecola.

Determinanti e applicazioni, di E. PASCAL, pag. VII-330 3 —

Diagnostica — *vedi* Semeiotica.

Dialetti italici. Grammatica, iscrizione, versione, e lessico, di O. NAZARI, pag. XVI-364. . . . . 3 —

— *vedi* Gramm storica della lingua e dei dialetti italiani.

Dialetti letterari greci (epico, neo-ionico, dorico, eolico) di G. BONINO, pag. XXXII-214 . . . . 1 50

Didattica per gli alunni delle scuole normali e pei maestri elementari, di G. SOLI, pag. VIII-314 . . . 1 50

Digesto (Il), di G. FERRINI, pag. IV-134 . . . . . . 1 50

Dinamica elementare, di G. CATTANEO, p. VIII-146, 26 fig. 1 50

Dinamite — *vedi* Esplodenti.

Diritti e doveri dei cittadini, secondo le Istituzioni dello Stato, per uso delle pubbliche scuole, di D. MAFFIOLI, 11ª ediz. (dal 31 al 35° migliaio) con una appendice sul Codice penale, pag. XVI-229 . . . . . 1 50

Diritti d'Autore — *vedi* Codici e Leggi usuali d'Italia Vol III.

Diritto — *vedi* Filosofia del Diritto.

Diritto amministrativo e cenni di Diritto costituzionale, giusta i programmi governativi ad uso di Istituti tecnici, di G. LORIS, 6ª edizione di pag. XIV-424 . . . 3 —

Diritto civile (Compendio di), di G. LORIS, giusta i programmi ad uso degli Istit. tecnici, 3ª ed. p. XVI-397 3 —

Diritto civile italiano, di C. ALBICINI. p. VIII-128 . . 1 50

Diritto commerciale italiano, di E. VIDARI, 3ª ediz. diligentemente riveduta, pag. X-448 . . . . 3 —

Diritto comunale e provinciale — *vedi* Contabilità comunale

L. c.

- Diritto amministrativo - Enciclopedia amministrativa - Legge comunale.

Diritto costituzionale, di F. P. CONTUZZI, 3ª ediz. interamente rinnovata, di pag. XIX-456 . . . . 3 —

Diritto ecclesiastico, vigente in Italia. 2ª ediz. riveduta ed ampliata di G. OLMO, pag. XVI-483. . . . . . . 3 —

Diritto internazionale privato, di F. P. CONTUZZI, 2ª ediz. rinnovata, di pagine XVI-322 . . . . 3 —

Diritto internazionale pubblico, di F. P. CONTUZZI, 2ª edizione rifatta, di pag. XXXII-412 . . . . 3 —

Diritto marittimo italiano, ad uso degli Istituti nautici e della gente di mare, di SISTO A., di pag. XII-566 . 3 00

Diritto penale romano di C. FERRRINI, pag. VIII-360. 3 —

Diritto romano, di C. FERRINI, 2ª ed. rif., pag. XVI-178 1 50

Disegnatore meccanico e nozioni tecniche generali di Aritmetica, Geometria, Algebra, Prospettiva, Resistenza dei materiali, Apparecchi idraulici, Macchine semplici ed a vapore, ecc. di V. GOFFI, 3ª ed. pag. XIV-552, con 477 fig. 6 50

Disegno. I principi del disegno, di C. Boito, 4ª ediz., pag. IV-206, con 61 silografie . . . . 2 —

Disegno (Grammatica del). Metodo pratico per imparare il disegno, di E. RONCHETTI, di pag. VI-190, con 34 fig., 62 schizzi intercalati nel testo e un atlante a parte con 45 lavagnette, 27 foglietti e 34 tav. (Indivisibili) . 7 50

Disegno assonometrico, di P. PAOLONI, pag. IV-122, con 21 tavole e 23 figure nel testo . . . . 2 —

Disegno geometrico, di A. ANTILLI, 3ª ed., pag. XII-88, con 6 figure nel testo e 28 tavole litografiche . . . 2 —

Disegno, teoria e costruzione delle navi, ad uso dei Progettisti e Costruttori di Navi - Capi tecnici, Assistenti e Disegnatori navali - Capi operai carpentieri - Alunni d'Istituti Nautici, di E. GIORLI, pag. VIII-238, con 310 incis. 2 50

Disegno industriale, di E. GIORLI. Corso regolare di disegno geometrico e delle proiezioni. Degli sviluppi delle superfici dei solidi. Della costruzione dei principali organi delle macchine. Macchine utensili. 3ª ed., pag. VIII-192, con 300 problemi risolti e 348 fig. 2 50

Disegno di proiezioni ortogonali, di D. LANDI, di pag. VIII-152, con 192 incis. . . . . 2 —

Disegno di tessitura — *vedi* Tessuti.

Disegno topografico, di G. BERTELLI, 2ª ediz., pag. VI-156, con 12 tavole e 10 incis. . . . . 2 —

Disinfezione (La pratica della) pubbl. e priv., P. E. ALESSANDRI e L. PIZZINI, 2ª ediz., p. VIII-258, 29 incis. . 2 50

Distillazione del legno (Lavorazione dei prodotti della). Acetone, Alcool metilico, Aldeide formica, Cloroformio, Acido acetico, Acetato di piombo, Acetato di

L. c.

sodio. *Industrie elettrochimiche*. Ossidi di piombo, Minio, Biacca, Soda Caustica, Clorati, Cromati, di F. VILLANI, di pag. XIV-312 . . . . 3 50

Distillazione delle Vinacce, e delle frutta fermentate. Fabbricazione razionale del Cognac, Estrazione del Cremore di Tartaro ed utilizzazione di tutti i residui della distillazione, di M. DA PONTE, 2ª ediz. rifatta, tenenti le leggi italiane sugli spiriti e la legge Austro-Ungarica, pag. XII-375, con 68 inc.. . . . . . . 3 50

Ditteri italiani, di P. LIOY (*Entomologia III*), pag. VII-356, con 227 inc. . . . . 3 —

Divina Commedia di Dante Alighieri (Tavole schematiche della), di L. POLACCO, seguite da 6 tav. topogr. in cromolit. disegn. da G. AGNELLI, pag. X-152 . . 3 —

Dizionario alpino italiano. Parte 1ª *Vette e valichi italiani*, di E. BIGNAMI-SORMANI. — Parte 2ª *Valli lombarde e limitrofe alla Lombardia*, di C. SCOLARI, pag. XXII-310 . . . . 3 50

Dizionario di abbreviature latine ed italiane usate nelle carte e codici specialmente del Medio Evo, riprodotte con oltre 13000 segni incisi, aggiuntovi un prontuario di *Sigle Epigrafiche*, i monogrammi, la numerizzazione romana ed arabica e i segni indicanti monete, pesi, misure, ecc., di A. CAPPELLI, p. LXII-433 7 50

Dizionario bibliografico, di C. ARLIA, pag. 100 . . . 1 50

Dizionario biograf. universale, di G. GAROLLO (In lav.).

Dizionario di botanica generale G. BILANCIONI. Istologia, Anatomia, Morfologia, Fisiologia, Biologia vegetale, Appendice, Biografie di illustri botanici, di p. XX-926 10 —

Dizionario dei comuni del Regno d'Italia, secondo il Censimento del 10 febbraio 1901, compilato da B. SANTI, 2ª ediz., con le altezze sul livello del mare, di pag. VIII-222 . , ... 3 —

Dizionario Eritreo (Piccolo) **italiano-Arabo-Amarico**, raccolta di vocaboli più usuali nelle principali lingue parlate nella Col. Eritrea, di A. ALLORI, p. XXXIII-203 2 50

Dizionario filatelico, per il raccoglitore di francobolli con introduzione storica e bibliografica, di J. GELLI 2ª ed., con appendice 1898-99, pag. LXIII-464 . . . 4 50

Dizionario fotografico pei dilettanti e professionisti, con oltre 1500 voci in 4 lingue, 500 sinonimi e 600 formule di L. GIOPPI, p. VIII-600, 95 inc. e 10 tav. . . 7 50

Dizionario geografico universale, di G. GAROLLO, 4ª ediz, del tutto rifatta e molto ampliata, di pag. XII-1451 a due colonne . . , ... 10 —

Dizionario gotico — *vedi* Lingua gotica.

Dizionario greco-moderno, di E. BRIGHENTI (In lavoro).

Dizionario tascabile italiano-inglese e inglese-italiano, di

L. c.

J. VESSELY, 16ª ediz. interamente rifatta da G. RIGUTINI e G. PAYN, in-16, di pag. VI-226-199 leg. in tela. 3 —

Dizionario italiano-olandese e olandese-italiano, di A. NUYENS, in-16, di pag. XI-948. . . . . 8 —

Dizionario milanese-italiano e repertorio italiano-milanese, di C. ARRIGHI, pag. 912, a 2 col., 2ª ediz.. . 8 50

Dizionario Numismatico — *vedi* Vocabolarietto numismatico.

Dizionario rumeno — *vedi* Grammatica rumena.

Dizionario di scienze filosofiche. Termini di Filosofia generale, Logica, Psicologia, Pedagogia, Etica, ecc., di C. RANZOLI, pag. VIII-683 . . . . 6 50

Dizionario stenografico. Sigle e abbreviature del sistema Gabelsberger-Noe, di A. SCHIAVENATO, p. XVI-156 1 50

Dizionario (Nuovo) **italiano-tedesco e tedesco-italiano,** compilato sui migliori vocabolari moderni, coll'accentuazione per la pronunzia dell'Italiano di A. FIORI, 3ª ed., pag. 798, rifatta da G. CATTANEO 3 50

Dizionario tecnico in 4 lingue, di E. WEBBER, 4 volumi:

I. Italiano-Tedesco-Francese-Inglese, 2ª ediz. riveduta e aumentata di circa 2000 termini tecnici, p. XII-553 6 —

II. Deutsch-Italienisch-Französisch-Englisch, 2ª ediz. di circa 2000 termini tecnici, di pag. VIII-611. . . 6 —

III. Français-Italien-Allemand-Anglais, pag. 509. . . 4 —

IV. Englisch-Italian-German-French, pag. 659 . . . 6 —

— *Vedi* vocabolario tecnico illustrato.

Dizionario tecnico-navale e commerciale maritt. inglese-italiano. — *vedi* Avarie e Sinistri marittimi.

Dizionario turco — *vedi* Grammatica turca.

Dizionario universale delle lingue italiana, tedesca, inglese e francese, disposte in unico alfabeto, di p. 1200 8 —

Dogana — *vedi* Codice doganale - Trasporti e tariffe.

Doratura — *vedi* Galvanizzaz. - Galvanostegia - Metallocr.

Dottrina popolare, in 4 lingue, (Italiana, Francese, Inglese e Tedesca), Motti popolari, frasi commerciali e proverbi, raccolti da G. SESSA, 2ª ediz., pag. IV-112 . 2 —

Doveri del macchinista navale, e condotta della macchina a vapore marina ad uso del macchinista navale e degli istituti nautici, di M. LIGNAROLO, di pag. XVI-303 . 2 50

Drammi — *vedi* Letteratura drammatica.

Droghiere (Manuale del) di L. MANETTI, di p. XXIV-322 3 —

Duellante (Manuale del) in appendice al *Codice cavalleresco,* di J. GELLI, 2ª ed., p. VIII-250, con 26 tav. 2 50

— *vedi* Codice cavalleresco.

Ebanista — *vedi* Falegname - Modellatore mecc - Operaio.

Ebraica (lingua) — *vedi* Grammatica - Letteratura.

Educazione dei bambini — *vedi* Balbuzie - Ortofrenia - Sordomuti.

Economia matematica (Introduzione alla), di F. VIRGILII e C. GARIBALDI, pag. XII-210, con 19 inc. . . 1 50

Economia politica di W. S. JEVONS, traduzione di L. COSSA, 5ª ediz., riveduta, pag. XV-180. . . . . . 1 50

Edilizia — *vedi* Costruzioni L. c.
Elasticità dei corpi — *vedi* Equilibrio.
Elettricità, di FLEEMING JENKIN, traduz. di R. FERRINI, 4ª ediz.. rived., pag. XII-237, con 40 inc. 1 50
— *vedi* Cavi telegrafici - Correnti elettriche - Elettrotecnica - Elettrochimica - Fulmini - Galvanizzazione - Illuminazione elettr. - Ingegnere elettricista - Magnetismo ed elettricità - Metallocromia - Operaio elettrotec. - Röntgen - Telefono - Telegrafia - Unità assolute.
Elettricità e materia di J. J. THOMSON. Traduzione ed aggiunte di G. FAÈ. 1905, di pag. XIV-299 con 18 inc. 2 —
Elettricitá medica, Elettroterapia. Raggi Röntgen. Radioterapia. Fototerapia. Ozono, Elettrodiagnostica, di A. D. BOCCIARDO, di pag. X-201, con 54 inc. e 9 tav. 2 50
— *vedi* Luce e salute - Röntgen (Raggi).
Elettrochimica (Prime noz. el. di), A. COSSA, VIII-104, 10 inc. 1 50
— *vedi* Distillazione del legno.
Elettromotori campioni e metodi di misura delle forze elettromotrici, di G. P. MAGRINI, p. XVI-185, 76 fig. 2 —
Elettrotecnica (Manuale di), di GRAWINKEL-STRECKER. traduz. italiana di F. DESSY, 2ª ed., p. XIV-890, 360 fig. 9 50
— *vedi* Operaio elettrotecnico.
Elezioni politiche — *vedi* Legge elettorale politica.
Ematologia — *vedi* Malattie del sangue.
Embriologia e morfologia generale, di G. CATTANEO, pag. X-242, con 71 inc. 1 50
Enciclopedia del giurista — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia.
Enciclopedia (Piccola) **amministrativa**. Manuale teorico-pratico per le amministrazioni comunali, provinciali e delle opere pie, di E. MARIANI, di pag. XV-1327 . 12 50
Enciclopedia Hoepli (Piccola), in 2 grossi vol. di 3375 pag. di 2 colonne per ogni pagina con Appendice (146740 voci) — L. 20. (Esaurito).
Energia fisica, di R. FERRINI, pag. VIII-187, con 47 incisioni, 2ª ediz. interamente rifatta 1 50
Enimmistica. Guida per comporre e per spiegare Enimmi, Sciarade, Anagrammi, Logogrifi, Rebus, ecc, di D. TOLOSANI (Bajardo), p. XII-516, con 29 ill. e molti esempi . 6 50
Enologia, precetti ad uso degli enologi italiani, di O. OTTAVI, 5ª ediz. di A. STRUCCHI, con una Appendice sul metodo della Botte unitaria pei calcoli relativi alle botti circolari, di R. BASSI, p. XVI-289, con 42 inc. . 2 50
— *vedi* Adulterazione vino — Analisi vino - Cantiniere - Cognac - Distillazione - Liquorista - Malattie vini - Mosti - Tannini - Vino.
Enologia domestica, di R. SERNAGIOTTO, p. VIII-233 . 2 —
Entomologia di A. GRIFFINI e P. LIOY, 4 vol. — *vedi* Coleotteri - Ditteri - Lepidotteri - Imenotteri.
Epigrafia latina. Trattato elementare con esercizi pratici e facsimili, con 65 tav. di S. RICCI, p. XXXII-448 6 50
— *vedi* Dizionario di abbreviature latine.
Epilessia. Eziologia, patogenesi, cura, di P. PINI, p. X-277 2 50

L. c.

Equazioni — *vedi* Algebra complementare.
Equilibrio dei corpi elastici (Teoria matematica dello), di R. MARCOLONGO, di pag. XIV-366 . . . . 3 —
Equini — *vedi* Cavallo - Razze bovine.
Eritrea (L') dalle sue origini al 1901. Appunti cronistorici con note geografiche e statistiche e cenni sul Benadir e sui viaggi d'esploraz. di B. MELLI, di pag. XII-164 2 —
Eritrea — *vedi* Arabo parlato - Dizionario eritreo - Grammatica galla - Lingue d'Africa - Prodotti del Tropico - Tigrè.
Errori e pregiudizi volgari, confutati colla scorta della scienza e del raziocinio da G. STRAFFORELLO, 2ª ed. accresciuta, pag. XII-196. . . . . 1 50
Esame degli infermi — *vedi* Semeiotica.
Esattore comunale (Manuale dell'), ad uso anche dei Ricevitori prov. ecc., di R. MAINARDI, 2ª ed., p. XVI-480 . 5 50
Esercito — *vedi* Armi antiche - Codice penale per - Storia dell'arte militare.
Esercizi geografici e quesiti, sull'Atlante geografico universale di R. Kiepert, di L. HUGUES, 3ª ediz. rifatta di pag. VIII-208. . . . . 1 50
Esercizi sintattici francesi, con tracce di componimento, temi di ricapitolazione e un indice alfabetico delle parole e delle regole, di D. RODARI, di pag. XII-403 . 3 —
Esercizi greci, per la 4ª classe ginnasiale in correlazione alle *Nozioni elem. di lingua greca*, di V. INAMA, di A. V. BISCONTI, 2ª ediz. rifatta, p. XXVI-234 . . 3 —
Esercizi latini con regole (Morfologia generale) di P. E. CERETI, pag. XII-332 . . . . 1 50
Esercizi di stenografia — *vedi* Stenografia.
Esercizi di traduzione a complemento della grammatica francese, di G. PRAT, 2ª ed., pag. VI-183 . . 1 50
Esercizi di traduzione con vocabolario a complemento della Grammatica tedesca, G. ADLER, 3ª ed., p. VIII-244 1 50
Esplodenti e modi di fabbricarli, di R. MOLINA, (esaurito è in lavoro la 2ª ediz.).
Espropriazione — *vedi* Ingegneria legale.
Espropriazioni per causa di pubblica utilità, di E. SARDI, di pag. VII-212-83 con 5 incis. e 2 tavole col. . . . 3 —
Essenze — *vedi* Distillaz. - Profum. - Liquorista - Ricettario.
Estetica. Lezioni sul bello, di M. PILO, pag. XXIII-257 2 50
— Lezioni sul gusto, di pag. XII-255 . . . . 2 50
Estimo dei terreni. Garanzia dei prestiti ipotecari e della equa ripartizione dei terreni, di P. FILIPPINI, pag. XVI-328, con 3 inc. . . . . 3 —
Estimo rurale, di CAREGA DI MURICCE (esaurito).
Etica (Elementi di), di G. VIDARI, 2ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XVI-356 . . . . 3 —
Etnografia, di B. MALFATTI, 2ª ed. rifusa, pag. VI-200 1 50
Euclide (L') emendato, del P. G. SACCHERI, traduzione e note di G. BOCCARDINI, di pag. XXIV-126 con 55 inc. 1 50

L. c.

Europa — *vedi* Storia di.

Evoluzione (Storia dell'), di C. FENIZIA, con breve saggio di Bibliografia evoluzionistica, pag. XIV-389 . . 3 —

Fabbricati civili di abitazione, di C. LEVI, 3ª ediz. rifatta, con 200 incisioni, e i Capitolati d'oneri approvati dalle principali città d'Italia di pag. XII-416 . . . 4 50

Fabbricati rurali (Costr. ed economia dei), V. NICCOLI, 3ª ed. riveduta di p. XVI-335, con 159 fig. 3 50

Fabbro — *vedi* Aritmetica dell'operaio - Fonditore - Meccanico - Operaio - Tornitore.

Fabbro-ferraio (Manuale pratico del), di G. BELLUOMINI, opera necessaria ed indispensabile ai fabbri fucinatori, agli aggiustatori meccanici, armajuoli, carrozzieri, carradori, calderai, di p. VIII-242, con 224 inc. 2 50

Falconiere (Il) moderno. Descrizione dei falchi, cattura educazione, volo e caccia alla selvaggina con gli uccelli di rapina di G. E. CHIORINO, di p. XV-247 con 15 tav. a colori e 80 illustrazioni nel testo . . . . 6 —

Falegname ed ebanista. Natura dei legnami, maniera di conservarli, colorirli e verniciarli, loro cubatura, di G. BELLUOMINI, 3ª ediz. di pag. X-223, con 104 inc. 2 —

Fallimenti — *vedi* Curatore di

Farfalle — *vedi* Lepidotteri.

Farmacista (Manuale del), di P. E. ALESSANDRI, 3ª ed. rifatta, notevolmente aumentata e corredata di tutti i nuovi medicamenti in uso nella terapeutica, loro proprietà, caratteri, alterazioni, falsificazioni, usi, dosi, ecc., di pag. XX-784 con 154 tav. e 85 incis. . . . 6 50

Farmacoterapia e formulario, di P. PICCININI, p. VIII-382 3 50

Fecola (La), sua fabbricaz. e sua trasformaz. in Destrina, Glucosio, Sagou, e Tapioca artificiali, Amido di Mais, di Riso e di Grano. Nozioni gener. sulla sua fabbricaz. Appendice: Sulla coltura del Lupino, di N. ADUCCI, di pag. XVI-285, con 41 inc. intercalate nel testo . . 3 50

Ferrovie — *vedi* Automobili - Macchin. e Fuochista - Strade ferrate - Trazione a vapore - Trasporti e tariffe.

Figure (Le) grammaticali, di G. SALVAGNI (in lavoro).

Filatelia — *vedi* Dizionario filatelico.

Filatura (La) **del cotone.** Manuale teorico-pratico di G. BELTRAMI, di pag. XV-558, con 196 inc. e 24 tab. 6 50

Filatura e torcitura della seta, di A. PROVASI, di pag. VIII-281, con 75 incis. 3 50

Filologia classica, greca e latina, di V. INAMA, p. XII-195 1 50

Filonauta. Quadro generale di navigazione da diporto e consigli ai principianti, con un Vocabolario tecnico più in uso nel panfiliamento, di G. OLIVARI, p. XVI-286 2 50

Filosofia — *vedi* Dizionario di scienze filosofiche - Estetica - Etica - Evoluzione - Logica - Psicologia.

Filosofia del diritto, di A. GROPPALI, pag. XI-378 . . 3 —

L. c.

Filosofia morale, di L. FRISO, 2ª edizione riveduta ed aumentata, di pag. XVI-350. . . . . 3 —
Filiossera e le principali malattie crittogamiche della vite con speciale riguardo ai mezzi di difesa, di V. PEGLION, pag. VIII-302, con 39 inc. . . . . 3 —
Finanze (Scienza delle), di T. CARNEVALI, pag. IV-140. 1 50
— *vedi* Matematica attuaria.
Fiori — *vedi* Floricoltura. Garofano, Orchidee, Orticoltura, Piante e fiori, Rose.
Fiori artificiali, Manuale del fiorista, di O. BALLERINI, pag. XVI-278, con 144 inc., e 1 tav. a 36 colori . . 3 50
— *vedi anche* Pomologia artificiale.
Fisica, di O. MURANI, 7ª ediz. accresciuta e riveduta dall'autore di pag. XVI-584 con 340 inc. . . . . . 3 —
Fisica cristallografica. Le proprietà fisiche fondamen. dei cristalli, di W. VOIGT, trad. di A. SELLA, p. VIII-392 3 —
— *vedi* Cristallografia
Fisiologia, di FOSTER, traduz. di G. ALBINI, 4ª ediz., pag. VII-223, con 35 inc. e 2 tavole 1 50
Fisiologia comparata — *vedi* Anatomia.
Fisionomia e mimica. Note curiose, ricerche storiche e scientifiche, osservazioni sulle interpretazioni dei caratteri dai segni della fisionomia e dei sentimenti della mimica della loro espressioni, di L. G. CERCHIARI, di pag. XII-335 con 77 inc. e XXXIII tavole . 3 50
Fisiologia vegetale, di L. MONTEMARTINI, pag. XVI-230, con 68 inc. 1 50
Floricoltura (Manuale di), di C. M. Fratelli RODA, 3ª ed. rived. ed ampliata da G. RODA, pag. VIII-262 e 98 inc. 2 50
Flotte moderne (Le) 1896-1900, di E. BUCCI DI SANTAFIORA. Complem. del Man. del Marino, di C. DE AMEZAGA, pag. IV-204 . . . . 5 —
Fognatura cittadina, di D. SPATARO, pag. X-684, con 220 figure e 1 tavola in litografia . . . . 7 —
Fognatura domestica, A. CERUTTI, p. VIII-421, 200 inc. 4 —
Fonditore in tutti i metalli (Manuale del), di G. BELLUOMINI, 3ª ediz., pag. VIII-178, con 45 inc. . . . 2 —
Fonologia italiana, di L. STOPPATO, pag. VIII-102 . . 1 50
Fonologia latina, di S. CONSOLI, pag. 208 . . . . . 1 50
Foot-Ball — *vedi* Giuoco del pallone - Lawn-tennis.
Foreste — *vedi* Consorzi - Selvicoltura.
Formaggio — *vedi* Caseificio - Latte, burro e cacio.
Formole e tavole per il calcolo delle risvolte ad arco circolare, adattate alla divisione centesimale ad uso degli ingegneri, di F. BORLETTI, di pag. XII-69, leg. 2 50
Formulario scolastico di matematica elementare (aritmetica, algebra, geometria, trigonometria), di M. A. ROSSOTTI, di pag. XVI-192 . . . . 1 50
Fosfati, perfosfati, e concimi fosfatici. Fabbricazione ed analisi, di A. MINOZZI, di pag. XII-301 con 48 inc. 3 50

L. c.

Fotocalchi — *vedi* Arti grafiche - Chimica fotografica - Fotografia industriale - Processi fotomeccanici.
Fotocollografia — *vedi* Processi fotomeccanici.
Fotocromatografia (La), di L. SASSI, p. XXI-138, con 19 inc. 2 —
Fotografia (I primi passi in), di L. SASSI, di pag. XVI-183 con 21 inc. e 13 tavole . . . . 2 —
Fotografia industriale (La), fotocalchi economici per la riproduzione di disegni, piani, ecc. di L. GIOPPI, pagine VIII-208, con 12 inc. e 5 tav. 2 50
Fotografia ortocromatica, di C. BONACINI di pagine XVI-277, con inc. e 5 tavole 3 50
Fotografia pei dilettanti. (Come dipinge il sole), di G. MUFFONE, 6ª ediz. riveduta ed ampliata, di p. XVI-428 con 290 incisioni e tavole 4 50
Fotografia senza obiettivo, di L. SASSI, di pag. XVI-135, con 127 inc., 12 tavole fuori testo e ritratto dell'aut. 2 50
Fotogrammetria, Fototopografia praticata in Italia e applicazione della fotogrammetria all'idrografia, di P. PAGANINI, pag. XVI-288, con 56 figure e 4 tavole. . . 3 50
Fotolitografia — *vedi* Arti grafiche - Processi fotomecc.
Fotosmaltografia (La), applicata alla decorazione industriale delle ceramiche e dei vetri, di A. MONTAGNA, pag. VIII-200, con 16 inc. nel testo . . . . 2 —
— *vedi anche* Carte fotografiche - Chimica fotografica - Dizionario fotografico - Processi fotomeccanici - Proiezioni - Ricettario fotografico - Spettrofotometria.
Fototerapia e radioterapia — *vedi* Luce e salute.
Fototipografia — *vedi* Arti grafiche - Processi fotomecc.
Fragole — *vedi* Frutta minori.
Francia — *vedi* Storia della Francia.
Francobolli — *vedi* Dizionario filatelico.
Fraseologia francese-italiana, di E. BAROSCHI SORESINI, pag. VIII-262 . . . . 2 50
Fraseologia straniera - *vedi* Conversazione - Dottrina popol.
Frenastenia — *vedi* Ortofrenia.
Frumento (Il), (come si coltiva o si dovrebbe coltivare in Italia), di E. AZIMONTI, 2ª ediz. di pag. XVI-276 . 2 50
Frutta minori. Fragole, poponi, ribes, uva spina e lamponi, di A. PUCCI, pag. VIII-193, con 96 inc. . . . 2 50
Frutta fermentate — *vedi* Distillazione.
Frutticoltura, di D. TAMARO, 4ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XVIII-233, con 113 inc. intercalate nel testo e 7 tavole sinottiche 2 50
Frutti artificiali — *vedi* Pomologia artificiale.
Fulmini e parafulmini, di CANESTRINI, p. VIII-166 con 6 inc. 2 —
Funghi mangerecci e funghi velenosi, di F. CAVARA, di pag. XVI-192, con 48 tavole e 11 inc. 4 50
Funzioni analitiche (Teoria delle), di G. VIVANTI, pagine VIII-432 (volume doppio) . . . . 3 —
Funzioni ellittiche, di E. PASCAL, pag. 240. . . . . 1 50

L. c.

Funzioni poliedriche e modulari, (Elementi della teoria delle), di G. VIVANTI, di pag. VIII-437 . . . . . 3 —

Fuochista — *vedi* Macchinista e fuochista.

Fuochi artificiali — *vedi* Esplodenti - Pirotecnia.

Furetto (Il). Allevamento razionale, Ammaestramento, Utilizzazione per la caccia, Malattie, di G. LICCIARDELLI, di pag. XII-172, con 39 inc. . . . . 2 —

Gallinacei — *vedi* Animali da cortile - Colombi - Pollicolt.

Galvanizzazione, pulitura e verniciatura dei metalli e galvanoplastica in generale. Manuale pratico per l'industriale e l'operaio riguardante la nichelatura, ramatura, doratura, argentat., stagnat., acciaiatura, galvanoplast. in rame, argento, oro, ecc., in tutte le varie applicaz. pratiche, di F. WERTH, (2ª ediz., in lavoro)

Galvanoplastica ed altre applicazioni dell'elettrolisi. Galvanostegia, Elettrometallurgia, Affinatura dei metalli. Preparazione dell'alluminio, Sbiancamento della carta e delle stoffe. Risanamento delle acque, Concia elettrica delle pelli, ecc. di R. FERRINI, 3ª ediz. completamente rifatta, pag. XII-417, con 45 incisioni . . . 4 —

Galvanostegia, di I. GHERSI. Nichelat., argentat., doratura, ramatura, metallizzaz., ecc. p. XII-324 con 4 inc 3 50

Garofano (Il), (Dianthus) nelle sue varietà, coltura e propagazione, di G. GIRARDI, con appendice di A. NONIN, di pag. VI-179, con 98 inc. e 2 tavole colorate. . . 2 50

Gastronomo (Il) moderno, di E. BORGARELLO. Vademecum ad uso degli albergatori, cuochi, segretari e personale d'albergo corredato da 250 Menus originali e moderni, e da un dizion. di cucina contenente 4000 termini più in uso nel gergo di cucina francese, di pag. VI-411 3 50

Gaz illuminante (Industria del), di V. CALZAVARA, pagine XXXII-672, con 375 inc. e 216 tabelle 7 50
— *vedi* Incandescenza a gaz.

Gaz povero, ad esplosione ecc. — *Vedi* motori.

Gelsicoltura, di D. TAMARO, 2ª diz. p. XXIX-245, 80 inc. 2 50

Geodesia — *vedi* Catasto - Celerimensura - Compensaz. errori - Disegno topograf. - Estimo - Telemetria - Triangolaz.

Geografia, di G. GROVE, traduzione di G. GALLETTI, 2ª ediz. riveduta, pag. XII-160, con 26 inc. 1 50

Geografia classica, di H. F. TOZER, traduzione e note di I. GENTILE, 5ª ediz., pag. IV-168. . . . . . . 1 50

Geografia commerciale economica. *Europa, Asia, Oceania, Africa, America,* P. LANZONI, 2ª ed., p. VII-370 3 —

Geografia fisica, di A. GEIKIE, trad. di A. STOPPANI, 3ª ediz., pag. IV-132, con 20 inc. 1 50
— *vedi* Alpi - Argentina - Atlante geografico - Cosmografia - Cristoforo Colombo - Cronologia scoperte geografiche - Dizionario alpino, geografico, dei comuni ital. - Esercizi geografici - Etnografia - Geologia - Mare - Prealpi bergamasche - Prontuario di geogr. - Statist. - Vulcanismo.

Geografia matematica — *vedi* Sfere cosmografiche.

L. c.

Geologia, di A. GEIKIE, traduz. di A. STOPPANI, quarta ediz., riveduta sull'ultima edizione inglese da G. MERCALLI, pag. XII-176, con 47 inc. 1 50
Geologo (Il) in campagna e nel laboratorio, di L. SEGUENZA, di pag. XV-305, con inc. . . . . 3 —
Geometria analitica dello spazio, di F. ASCHIERI, pagine VI-196, con 11 inc. 1 50
Geometria analitica del piano, di F. ASCHIERI, pagine VI-194 con 12 inc. 1 50
Geometria descrittiva, di F. ASCHIERI, pag. VI-222, con 108 inc., 2ª ediz. rifatta 1 50
Geometria elementare, (Complementi di) di C. ALASIA, di pag. XV-244 con 117 figure 1 50
Geometria e trigonometria della sfera, di C. ALASIA, pag. VIII-208, con 34 inc. 1 50
Geometria metrica e trigonometria, di S. PINCHERLE, 6ª ediz., pag. IV-158, con 47 inc. 1 50
— *vedi* Trigonometria.
Geometria pratica, di G. EREDE, 4ª ediz. riveduta ed aumentata, pag. XVI-258, con 134 inc. . . . . . 2 —
Geometria projettiva del piano e della stella, di F. ASCHIERI, 2ª ediz., pag. VI-228, con 86 inc. 1 50
Geometria projettiva dello spazio, di F. ASCHIERI, 2ª ediz. rifatta, pag. VI-264, con 16 inc. 1 50
Geometria pura elementare, di S. PINCHERLE, 6ª ediz. con l'aggiunta delle figure sferiche, p. VIII-176 con 121 inc. 1 50
Geometria elementare (Esercizi sulla), di S. PINCHERLE, pag. VIII-130, con 50 inc. 1 50
Geometria elementare (Problemi di) di, I. GHERSI, (Metodi facili per risolverli), con circa 200 problemi risolti, e 119 inc., di pag. XII-160 . . . . 1 50
— *vedi* Euclide emendato
Geometria dell'Operaio — *vedi* Aritmetica.
Ghiaccio — *vedi* Industria frigorifera.
Giardino (Il) infantile, di P. CONTI, pag. IV-213, 27 tav. 3 —
Ginnastica (Storia della), di F. VALLETTI, pag. VIII-184 1 50
Ginnastica femminile, di F. VALLETTI, pag. VI-112, 67 ill. 2 —
Ginnastica maschile (Manuale di), per cura di J. GELLI, pag. VIII-108, con 216 inc. . . . . 2 —
— *vedi anche* Acrobatica - Giuochi ginnastici.
Gioielleria, oreficeria, oro, argento e platino — *vedi* Orefice.
— *vedi anche* Leghe metall. - Metallurgia dell'oro - Metalli preziosi - Pietre preziose - Saggiatore - Tavole alligazione.
Giuochi — *vedi* Biliardo - Lawn-Tennis - Scacchi.
Giuochi ginnastici per la gioventù delle Scuole e del popolo, di F. GABRIELLI, pag. XX-218, con 24 tav. . . . 2 50
Giuoco (Il) del pallone e gli altri affini. Giuoco del calcio (Foot-Ball), della palla a corda (Lawn-Tennis), della palla al muro (Pelota), della palla a maglio e dello sfratto, di G. FRANCESCHI, di pag. VIII-214, con 34 inc. 2 50

L. c.

Grammatica sanscrita — *vedi* Sanscrito.
Grammatica serbo-croata, di G. ANDROVIC (In lavoro).
Grammatica della lingua slovena. Esercizi e vocabolario di B. GUYON, di pag. XVI-314 . . . . 3 —
Grammatica spagnuola, di L. PAVIA, 2ª ediz. riveduta di pag. XII-194 . . . . 1 50
Grammatica della lingua svedese, di E. PAROLI, di pagine XV-293 . . . . 3 —
Grammatica storica della lingua e dei dialetti italiani di F. D'OVIDIO e G. MEYER-LÜBKE. Trad. sulla 2ª ediz. tedesca di E. POLCARI, di pag. XII-301 . . . 3 —
Grammatica tedesca, di L. PAVIA, 2ª ediz. di p. XVIII-272 1 50
Grammatica del Tigrè — *vedi* Tigrè italiano.
Grammatica turca osmanli, con paradigmi, crestomazia, e glossario, di L. BONELLI, di pag. VIII-200 e 5 tavole 3 —
Grandine — *vedi* Assicurazioni.
Granturco — *vedi* Mais - Industria dei molini.
Gravitazione Spiegazione elementare delle principali perturbazioni nel sistema solare, di Sir G. B. AIRY, traduzione di F. PORRO, con 50 inc., pag. XXII-176 . 1 50
Grecia antica — *vedi* Archeologia (Arte greca) - Atene - Mitologia greca - Monete greche - Storia antica.
Gruppi continui di trasformazioni (Parte generale della teoria), di E. PASCAL, di pag. XI-378 . . . . . . 3 —
Guida numismatica universale, cont. 6278 indirizzi e cenni storico-statistici di collez. pubbliche e private, di numismatici, di società e riviste numism., di incisioni, di monete e medaglie e di negoz. di monete e libri di numismatica, di F. GNECCHI. 4ª ediz., di p. XV-612. . 8 —
Guttaperca — *vedi* Imitazioni.
Humus (L'), **la fertilità e l'igiene dei terreni culturali,** di A. CASALI, pag. XVI-210. . . . . 2 —
Idraulica, di T. PERDONI (E' in lavoro la 2ª ediz.).
— *vedi* Consorzi di difesa del suolo
Idrografia — *vedi* Fotogrammetria.
Idroterapia, di G. GIBELLI, pag. IV-238, con 30 inc. . 2 —
— *vedi anche* Acque minerali e termali del Regno d'Italia.
Igiene dell'alimentazione — *vedi* Bromatologia.
Igiene della bocca e dei denti, nozioni elementari di Odontologia, di L. COULLIAUX, di pag. XVI-330 e 23 inc. 2 50
Igiene del lavoro, di TRAMBUSTI A. e SANARELLI G., di pag. VIII-262, con 70 inc. 2 50
Igiene della mente e dello studio, di G. ANTONELLI, di pag. XXIII-410 . . . . 3 50
Igiene della pelle, di A. BELLINI, di pag. XVI-240, 7 inc. 2 —
Igiene privata e medicina popolare ad uso delle famiglie, di C. BOCK, 2ª ed. ital. di G. GALLI, di p. XVI-272 2 50
Igiene rurale, di A. CARRAROLI, pag. X-470 . . . . 3 —
Igiene scolastica di A. REPOSSI, 2ª ediz., pag. IV-246. 2 —
Igiene del sonno, di G. ANTONELLI, di p. VI-224 con 1 tav. 2 50

L. c.

Igiene veterinaria, di U. BARPI, di pag. VIII-228. . . 2 —
Igiene della vista sotto il rispetto scolastico, di A. LOMONACO, di pag. XII-272 . . . . 2 50
Igiene della vita pubblica e privata, G. FARALLI, p. XII-250 2 50
Igroscopi, igrometri, umidità atmosferica, di P. CANTONI, pag. XII-142, con 24 inc. e 7 tabelle 1 50
Illuminazione — *vedi* Acetilene - Gaz illum. - Incandescenza
Illuminazione elettrica (Impianti di), Manuale pratico di E. PIAZZOLI, 5ª ediz. interamente rifatta, (9-11 migliaio) seguita da un'appendice contenente la legislazione Ital. relativa agli impianti elettr., di pag. 606, con 264 inc., 90 tab. e 2 tav. (è in lavoro la 6ª ediz.)
Imbalsamatore — *vedi* Naturalista preparatore - Naturalista viaggiatore - Zoologia.
Imbianchimento — *vedi* Industria tintoria - Ricettario industriale.
Imenotteri, Neurotteri, Pseudoneurotteri, Ortotteri e Rincoti italiani, di E. GRIFFINI (Entomologia IV), di pag. XVI-687, con 243 inc. 4 50
Imitazione di Cristo (Della), Libri quattro di GIO. GERSENIO, volgarizzamento di CESARE GUASTI, con proemio e note di G. M. ZAMPINI, pag. LVI-396. . . . 3 50
Imitazioni e succedanei nei grandi e piccoli prodotti industriali. Pietre e materiali da costruz. Materiali refrattarî, Carborundum, Amianto, Pietre e metalli preziosi, Galvanoplastica, Cuoio, Seta e fibre tessili, Paste da carta, Materie plastiche, Gomma elastica e Guttaperca, Avorio, Corno, Ambra, Madreperla, Celluloide, ecc. di I. GHERSI, di pag. XVI-591, con 90 inc. 6 50
Immunità e resistenza alle malattie, di A. GALLI VALERIO, pag. VIII-218 . . . . 1 50
Impalcature — *vedi* Costruzioni.
Impiego ipodermico (L') e la dosatura dei rimedi, Manuale di terapeutica di G. MALACRIDA, pag. 305. . 3 —
Imposte dirette (Riscos. delle), di E. BRUNI, p. VIII-158 . 1 50
Incandescenza a gas. (Fabbricazione delle reticelle) di L. CASTELLANI, pag. X-140, con 33 inc. . . . . . 2 —
Inchiostri — *vedi* Ricettario industriale - Vernici ecc.
Incisioni — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte - Raccoglitore di oggetti minuti.
Indovinelli — *vedi* Enimmistica
Industria (L') frigorifera di P. ULIVI. Nozioni fondamentali, macchine frigorifere, raffreddamento dell'aria, ghiaccio artificiale e naturale, dati e calcoli numerici, nozioni di fisica e cenni sulla liquefazione dell'aria e dei gaz, di pag. XII-168, 36 fig. e 16 tab. 2 —
Industria tintoria, di M. PRATO. — I. Imbianchimento e Tintura della Paglia; — II. Sgrassatura e imbianchimento della Lana; — III. Tintura e stampa del

L. c.

Cotone in indaco; — IV. Tintura e stampa del Cotone in colori azoici. di pag. XXI-292, con 7 inc. . . 3 —

Industrie elettrochimiche — *vedi* Distillazione del legno.

Industrie Grafiche — *vedi* Arti Grafiche - Litografia - Tipografia.

Industrie (Piccole). Scuole e musei industriali - Industrie agricole e rurali - Industrie manifatturiere ed artistiche, di I. GHERSI, di pag. XII-372 . . . . . 3 50

Infanzia — *vedi* Rachitide - Malattie dell' - Giardino infantile - Nutrizione - Ortofrenia - Posologia della terapia infantile - Sordomuto.

Infezione — *vedi* Disinfezione - Medicatura antisettica.

Infortuni della montagna (Gli). Manuale pratico degli Alpinisti, delle guide e dei portatori, di O. BERNHARD, trad. di R. CURTI, di p. XVIII-60, con 65 tav. e 175 figure. 3 50

Infortuni sul lavoro (Mezzi tecnici per prevenirli), di E. MAGRINI, di pag. XXXII-252, con 257 inc. . . . 3 —

— *vedi anche* Legge per gli.

Ingegnere agronomo — *v.* Agricoltore (Pront. dell') - Agronom.

Ingegnere civile. Manuale dell'ingegnere civile e industriale, di G. COLOMBO, 22ª ediz. e aumentata (58° al 60° migliaio), con 231 fig. e una tav., di p. XII-452 . . 5 50

Il medesimo tradotto in francese da P. MARCILLAC 5 50

— *vedi* Costruzioni.

Ingegnere elettricista, di A. MARRO, di pag. XV-689 con 192 inc. e 115 tabelle 7 50

Ingegnere navale, di A. CIGNONI, di p. XXXII-292, con 36 fig. 5 50

Ingegnere rurale — *vedi* (Prontuario dell') - Agricoltore.

Ingegneria legale — *vedi* Codice dell'Ingegnere.

Inghilterra — *vedi* Storia d'Inghilterra.

Insegnamento (L') dell'italiano nelle Scuole secondarie, di C. TRABALZA, di pag. XVI-254 . . . . 1 50

Insetti nocivi, di F. FRANCESCHINI, p. VIII-264, con 96 inc. 2 —

Insetti utili, di F. FRANCESCHINI, di pag. XII-160, con 42 inc. e 1 tavola . . . . 2 —

Interesse e sconto, di E. GAGLIARDI, 2ª ediz. rifatta e aumentata, pag. VIII-198. . . . . 2 —

Inumazioni — *vedi* Morte vera.

Ipnotismo — *vedi* Magnetismo - Occultismo - Spiritismo - Telepatia.

Ipoteche (Man. per le) di A. RABBENO, di pag. XVI-247 1 50

Islamismo (L'), di I. PIZZI, di pag. VIII-494. . . . . 3 —

Ittiologia italiana, di A. GRIFFINI, con 244 inc. Descriz. dei pesci di mare e d'acqua dolce, di pag. XVIII-469 4 50

— *vedi anche* Piscicoltura - Ostricoltura.

Lacche — *vedi* Vernici ecc.

Lanterna magica — *vedi* Cinematografo.

Laringologia — *v.* Malattie dell'orecchio, del naso e della gola.

Latte, burro e cacio. Chimica analitica applicata al caseificio, di G. SARTORI, pag. X-162, con 24 inc. . . 2 —

Lavori femminili — *vedi* Abiti per Signora - Biancheria - Macchine da cucire - Monogrammi - Trine a fuselli.

L. c.

Lavori marittimi ed impianti portuali, di F. BASTIANI, di pag. XXIII-424, con 209 figure 6 50

Lavori pubblici — *vedi* Leggi sui lavori pubblici.

Lavori in terra (Man. di), di B. LEONI, p. XI-305 con 38 inc. 3 —

Lavoro (Il) **delle donne e dei fanciulli.** Nuova legge e regol. 19 giugno 1902 - 28 febbraio 1903. Testo, atti parlam. e commento, per cura di E. NOSEDA di pag. XV-174 . 1 50

Lawn-Tennis, di V. BADDELEY, prima traduz. italiana con note e aggiunte del trad. pag. XXX-206 con 13 ill. 2 50

Legge (La nuova) **comunale e provinciale,** annotata da E. MAZZOCCOLO, 5ª ediz. coordinata coi decreti e leggi posteriori a tutto il 1904, con due indici di pag. 976 7 50

— *vedi* Enciclopedia amministrativa.

Legge (La) **elettorale politica nelle sue fonti e nella sua giurisp udenza,** di C. MONTALCINI, di pag. XVI-496 . 5 50

Legge sui lavori pubblici e regolamenti, di L. FRANCHI, pag· IV-110-XLVIII 1 50

Legge lavoro donne e fanciulli — *vedi* lavoro.

Legge sull'ordinamento giudiziario, di L. FRANCHI, di pag. IV-92-CXXVI. 1 50

Leggende popolari, di E. MUSATTI, 3ª ediz., pag. VIII-181 1 50

Leggi sugli infortuni sul lavoro, di A. SALVATORE, di pag. 312 . . . . 3 —

Leggi e convenzioni sui diritti d'autore — *vedi* Codici e leggi usuali d'Italia, vol III.

Leggi e convenzioni sulle privative industriali — *vedi* Codici e Leggi usuali d'Italia, vol. IV.

Leggi sulla sanità e sicurezza pubblica, di L. FRANCHI, pag. IV-108-XCII 1 50

Leggi sulle tasse di Registro e Bollo, con appendice, di L. FRANCHI, pag. IV-124-CII 1 50

Leggi usuali d'Italia. Vedi Codici e Leggi.

Leghe metalliche ed amalgame, alluminio, nichelio, metalli preziosi e imitazione, bronzo, ottone, monete e medaglie, saldature, di I. GHERSI, p. XVI-431, 15 inc. 4 —

Legislazione sulle acque, di D. CAVALLERI, pag. XV.274 2 50

Legislazione mortuaria — *vedi* Morte.

Legislazione sanitaria italiana (La nuova), di E. NOSEDA, di pag. VIII-570. . . . . 5 —

Legislazione rurale, secondo il programma governativo per gli Istituti Tecnici, di E. BRUNI, 2ª ed. p. XV-423 3 —

Legnami — *vedi* Cubatura dei legnami - Falegname.

Legno artificiale — *vedi* Imitazioni.

Legno (Lavoraz. dei prodotti di distillaz. del) — *vedi* Distillaz.

Lepidotteri italiani, di A. GRIFFINI (Entomol. II). pagine XIII-248, con 149 inc. 1 50

Letteratura albanese (Manuale di), di A. STRATICÒ, pagine XXIV-280. . . . . 3 —

Letteratura americana, di G. STRAFFORELLO, pag. 158 1 50

Letteratura araba, di I. PIZZI, di pag. XII-388 . . . 3 —

L. c.

— *vedi anche* Islamismo.

Letteratura assira, di B. Teloni, pag. xv-266 e 3 tav. 3 —

Letteratura catalana, di A. Restori (In lavoro).

Letteratura danese — *vedi* Letteratura norvegiana.

Letteratura drammatica, di C. Levi, pag. xii-339 . . 3 —

Letteratura ebraica, di A. Revel, 2 vol. pag. 364 . . 3 —

Letteratura egiziana, di L. Brigiuti. (In lavoro).

Letteratura francese, di E. Marcillac, traduz. di A. Paganini, 3ª ediz., pag. viii-198 . . . . 1 50

Letteratura greca, di V. Inama. 14ª ediz. riveduta (dal 56° al 61° migliaio), pag. viii-236 e una tavola . . 1 50

Letteratura indiana, di A. De Gubernatis, p. viii-159 1 50

Letteratura inglese, di E. Solazzi, 2ª ed. di p. viii-194 1 50

Letteratura italiana, di C. Fenini, dalle origini al 1748 5ª ed. complet. rifatta da V. Ferrari, p. xvi-291 . 1 50

Letteratura italiana moderna (1748-1870). Aggiunti 2 quadri sinottici della letteratura contemporanea (1870-1901), di V. Ferrari, pag. 290 . . . . 1 50

Letteratura italiana moderna e contemporanea 1748-1903. di V. Ferrari, di pag. viii-429 . . . . . 3 —

Letteratura militare (Nozioni di) compilate secondo i programmi del Minist. della Guerra, da E. Maranesi, di pag. viii-224 . . . . 1 50

Letteratura latina — *vedi* Letteratura romana.

Letteratura norvegiana, di S. Consoli, p. xvi-272 . . 1 50

Letteratura persiana, di I. Pizzi, pag. x-208 . . . . 1 50

Letteratura pratica, di A. De Guarinoni, (in lavoro).

Letteratura provenzale, di A. Restori, pag. x-220 . . 1 50

Letteratura romana, di F. Ramorino, 6ª ediz. corretta (dal 23° al 27° migliaio), di pag. viii-349 . . . . . 1 50

Letteratura rumena di R. Lovera (in lavoro).

Letteratura spagnuola e portoghese, di L. Cappelletti 2ª ediz. rifatta da B. Sanvisenti (In lavoro).

Letteratura tedesca, di O. Lange, 3ª ediz. rifatta da R. Minutti, pag. xvi-188 . . . . 1 50

Letteratura ungherese, di Zigany Arpàd, p. xii-295 . 1 50

Letteratura universale (Compendio di) di P. Parisi, di pag. viii-391 . . . . 3 —

Letteratura — *vedi anche* Arabo parlato - Arte del dire - Corrispondenza - Conversazione - Crittografia - Dantologia - Dialetti - Dizionari - Dottrina - Enciclopedia - Esercizi - Filologia - Fonologia - Fraseologia - Glottologia - Grammatiche - Leggende - Lingua - Metrica dei greci e rom. - Morfologia greca - Id. italiana - Omero - Ortoepia e ortografia - Paleografia - Relig. e ling. di India Rettorica - Ritmica italiana - Sanscrito - Shakespeare - Sintassi francese - Sintassi latina - Stilistica - Stilistica latina - Tigrè - Traduttore - tedesco - Verbi greci - Verbi latini - Vocabol. russo - Volapuk.

L. c.

Letterature slave, di D. CIÀMPOLI. 2 volumi:
I. Bulgari, Serbo-Croati. Yugo-Russi, pag. IV-144 . 1 50
II. Russi, Polacchi, Boemi, pag. IV-142 . . . . . 1 50
Levatrice — *vedi* Ostetricia
Limnologia di G. MAGRINI (In lavoro).
Limoni — *vedi* Agrumi.
Lingua araba — *vedi* Arabo parlato - Dizionario eritreo Grammatica Galla - Lingue dell'Africa - Tigrè.
Lingua giapponese parlata. Elementi grammaticali e glossario di F. MAGNASCO, di pag, XVI-110 . . . . 2 —
Lingua cinese parlata. Elementi grammaticali e glossario di F. MAGNASCO, di pag. XVI-114 . . . . . 2 —
Lingua gotica, grammatica, esercizi, testi, vocabolario comparato con ispecial riguardo al tedesco, inglese, latino e greco, di S. FRIEDMANN, pag. XVI-333 . . 3 —
Lingua greca — *vedi* Dialetti - Dizionario - Esercizi - Filologia - Florilegio - Grammatica - Letteratura - Morfologia - Verbi.
Lingua dell' Africa, di R. CUST, versione italiana di A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-110 . . . . 1 50
Lingua persiana, di D. ARGENTIERI. Grammatica, crestomazia, glossario. (In lavoro).
Lingua latina — *vedi* Dizionario di abbreviature latine - Epigrafia - Esercizi - Filologia classica - Fonologia - Grammatica - Letteratura romana - Metrica - Verbi.
Lingue Germaniche — *vedi* Grammatica danese-norvegiana, inglese, olandese, tedesca, svedese.
Lingua Russa (Manualetto della) con la pronunzia figurata di P. G. SPERANDEO, contenente la grammatica e gli esercizi, oltre 3000 vocaboli della lingua arlata, con le flessioni irregolari, una scelta di prose e di poesie, un frasario. 2ª ediz. di pag. IX-274 . . 4 —
Lingua turca osmanli — *vedi* Grammatica.
Lingue neo-latine, di E. GORRA, di pag. 147 . . . . 1 50
Lingue straniere (Studio delle), di C. MARCEL, ossia l'arte di pensare in una lingua straniera, traduzione di G. DAMIANI, di pag. XVI-136 . . . . 1 50
Linguistica — *vedi* Grammatica storica della lingua e dei dialetti italiani - Figure (Le) grammaticali.
Linoleum — *vedi* Imitazioni.
Liquidatore di sinistri marittimi - *vedi* Avarie e sinistri maritt.
Liquorista (Manuale del), di A. ROSSI, con 1450 ricette pratiche, 2ª ediz. con modificazioni ed aggiunte a cura di A. CASTOLDI, di pag. XVI-682 con figure . . 6 50
Litografia, di C. DOYEN, di pag. VIII-261, con 8 tavole e 40 figure di attrezzi, ecc. occorrenti al litografo . 4 —
Liuto — *vedi* Chitarra - Mandolinista - Strumenti ad arco - Violino - Violoncello.
Locomobili (Manuale pei conduttori di) con appendice sulle trebbiatrici, di L. CEI. 2ª ediz., di pag. XII-314, con 147 incis. e 32 tabelle 2 50

L. c.

— *vedi* Automobili - Macchinista - Trazione a vapore.

Logaritmi (Tavole di), con 6 decimali, di O. MULLER, 8ª ediz. aumentata dalle tavole dei logaritmi d'addizione e sottrazione per cura di M. RAINA, di pagine XXXVI-191. (11, 12, 13° migliaio) 1 50

Logica, di W. STANLEY JEVONS, traduz. di C. CANTONI, 5ª ediz. di pag. VIII-166, con 15 inc. 1 50

Logica matematica, di C. BURALI-FORTI, p. VI-158 . . 1 50

Logismografia, di C. CHIESA. 3ª ediz., pag. XIV-172 . 1 50

Logogrifi — *vedi* Enimmistica.

Lotta — *vedi* Pugilato.

Luce e colori, di G. BELLOTTI, pag. X-157, con 24 inc. 1 50

Luce e suono, di E. JONES, traduzione di U. FORNARI, di pag. VIII-336, con 121 inc. . . . . —

Luce e salute. Fototerapia e radioterapia, di A. BELLINI, di pag. XII-362, con 65 figure 3 50

Lupino — *vedi* Fecola.

Lupus — *vedi* Luce e salute.

Macchine (Atlante di) e di Caldaie, con testo e note di tecnologia, di S. DINARO di pag. XV-80, con 112 tavole e 170 figure in iscala ridotta . . . . 3 —

Macchine (Il Montatore di). Opera arricc, da oltre 250 es. pratici e problemi risolti, di S. DINARO, pag. XII-468 4 —

Macchine agricole — *vedi* Meccanica agraria.

Macchine a vapore (Manuale del costruttore di), di H. HAEDER. 2ª edizione italiana con notevoli aggiunte di E. WEBBER (In lavoro).

Macchine per cucire e ricamare, di A. GALASSINI, pag. VII-230, con 100 inc. 2 50

Macchinista e fuochista, di G. GAUTERO, riveduto e ampliato da L. LORIA, 10ª ediz. con Appendice sulle locomobili e le locomotive e del Regolamento sulle caldaie a vapore di pag. XX-194, con 34 inc. . . . 2 —

Macinazione — *vedi* Industrie dei molini - Panificazione.

Magnetismo ed elettricità. Principi e applicazioni esposti elementarmente, di F. GRASSI, 3ª ediz. di pag. XVI-508, con 280 figure 6 tavole 5 50

Magnetismo e ipnotismo, di G. BELFIORE, 2ª ed. rifatta pag. VIII-396 . . . . 3 50

Maiale (Il). Razze, metodi di riproduzione, di allevamento, ingrassamento, commercio, salumeria, patologia suina e terapeutica, tecnica operatoria, tossicologia, dizionario suino-tecnico, di E. MARCHI, 2ª ed. pag. XX-736, con 190 inc. e una Carta 6 50

Maioliche e porcellane (L'amatore di), di L. DE MAURI, illustrato da 3000 marche e da 12 tavole a colori. Contiene: Tecnica della fabbricazione - Cenni storici ed artistici - Dizionario di termini — Prezzi correnti - Bibliografia ceramica, pag. XII-650 . . . . 12 50

Mais (Il) o granoturco, o formentone, o granone, o mel-

L. c.

gone, o melica, o melicotto, o carlone, o polenta, ecc. Norme per una buona coltivazione, di E. AZIMONTI, 2ª ediz. di pag. XII-196, con 61 inc. nel testo . . . 2 50

Malaria (La) **e le risaie in Italia**, G. ERCOLANI, p. VIII-203 2 —

Malattie dell'infanzia (Terapia delle), di G. CATTANEO, di pag. XII-506 . . . . 4 —

— *v.* Balbuzie - Nutr. del bambino - Ortofrenia - Rachitide.

Malattie infettive (**Profilassi delle**) **degli animali**, di U. FERRETTI, di pag. X 582 . . . . 4 50

Malattie dell'orecchio, del naso e della gola (Oto-rino-laringoiatria) di T. MANCIOLI, di pag. XXIII-540, 98 inc. 5 50

Malattie dei paesi caldi, loro profilassi ed igiene con un' appendice « La vita nel Brasile » - Regolamenti di sanità pubblica contro le infezioni esotiche; di C. MUZIO, pag. XII-562, con 154 inc. e 11 tavole . . . 7 50

Malattie crittogamiche delle piante erbacee coltivate, di R. WOLF, traduz. con note ed aggiunte di P. BACCARINI, pag. X-268, con 50 inc.. . . . . 2 —

Malattie ed alterazione dei vini, di S. CETTOLINI, di pag. XI-138, con 13 inc. . . . . 2 —

Malattie (Resistenza alle) — *vedi* Immunità.

Malattie della pelle — *vedi* (Igiene delle)

Malattie del sangue. Manuale d'Ematologia, di E. REBUSCHINI, di pag. VIII-432 . . . . 3 50

Malattie sessuali, di G. FRANCESCHINI, di pag. XV-216 2 50

Malattie della vite — *vedi* Fillossera - Malattie crittogam.

Mammiferi — *vedi* Zoologia.

Mandarini — *vedi* Agrumi.

Mandato commerciale, di E. Vidari, pag. VI-160 . . . 1 50

Mandolinista (Manuale del), di A. PISANI, pag. XX-140, con 13 figure, 3 tavole e 39 esempi . . . . 2 —

Manicomio — *vedi* Assistenza pazzi - Psichiatria

Manzoni Alessandro. Cenni biografici di L. BELTRAMI, di pag. 109, con 9 autografi e 68 inc. 1 50

Marche di fabbrica — *vedi* Amatore oggetti d'arte - Leggi sulle proprietà - Maioliche

Mare (Il), di V. BELLIO, pag. IV-140, con 6 tav. lit. a col. 1 50

Marine (Le) **da guerra del mondo al 1897**, di L. D'ADDA, pag. XVI-320, con 77 illustr. 4 50

Marino (Manuale del) **militare e mercantile**, del Contr'ammiraglio DE AMEZAGA, con 18 xilografie, 2ª ediz., con appendice di BUCCI DI SANTAFIORA . . 5 —

Marmista (Man. del), A. RICCI, 2ª ed., p. XII-154, 47 inc. 2 —

Marmo — *vedi* Imitazioni.

Massaggio, di R. MAINONI, pag. XII-179, con 51 inc. . 2 —

Mastici — *vedi* Ricettario industriale - Vernici ecc.

Matematica attuariale, Storia, Statistica delle mortalità, Matemat. delle Assicur. s. vita, U. BROGGI, p. XV-347 3 50

Matematica (Complementi di) ad uso dei chimici e dei naturalisti, di G. VIVANTI, di pag. x-381. . . . . 3 —

L. c.

Matematiche — *vedi* Algebra - Aritmetica - Astronomia - Calcolo - Celerimensura - Compensazione errori - Computisteria - Conti e calcoli fatti - Cubatura legnami - Curve - Determinanti - Disegno - Economia matematica - Equilibrio corpi - Euclide (L') emendato - Formulario di matemat. - Fotogrammetria - Funzioni analitiche - Id. ellittiche - Geometria - Gnomonica - Gruppi di trasformaz. - Gravitaz. - Interesse e sconto - Logaritmi - Logica matematica - Logismografia - Matematica (compl. di) - Matematiche superiori - Metrologia - Peso metalli - Prospettiva - Ragioneria - Ragioniere - Regolo calcolatore - Repertor. di matematica - Stere ometria - Strumenti metrici - Telemetria - Teoria dei numeri - Teoria d. ombre - Termodinamica Triangolazioni - Trigonometria.

Matematiche superiori (Repertorio di), Definizioni, formole, teoremi, cenni bibliografici, di E. PASCAL.
Vol. I. *Analisi*, pag. XVI-642 . . . . 6 —
Vol. II. *Geometria*, e indice per i 2 vo ι ; 50 9 50

Materia medica moderna (Man di), di G. MALACRIDA, pag. XI-761 . . . . 7 50

Mattoni e pietre di sabbia e calce (Arenoliti) in relazione specialmente al processo di indurimento a vapore sotto alta pressione, di E. STOFFLER e M. GLASENAPP. Ediz. italiana con note ed aggiunte di G. REVERE, di pag. VIII-232, con 85 figure e 3 tavole . 3 —
— *vedi* Calcestruzzo - Calci e cementi - Imitazioni.

Meccanica, di R. STAWELL BALL traduz. di J. BENETTI 4ª ed. pag XVI-214, con 89 inc. 1 50

Meccanica agraria di V. NICCOLI.
Vol. I. *Lavorazione del terreno*. I lavori del terreno. - Strumenti a mano per la lavorazione delle terre - Dell'aratro e delle arature - Strumenti per lavori di maturamento e di colturamento - Trazione funicolare e meccanica - Strumenti da tiro per i trasporti, di pag. XII-410, con 257 inc. . . 4 —
Vol. II. *Dal seminare al compiere la prima manipolazione dei prodotti*. Macchine e strumenti per seminare e concimare - Per il sollevamento delle acque - Per la raccolta dei prodotti - Per la conservazione e preparazione dei foraggi - Per trebbiare - Sgranare - Pulire - Dicanapulare e per la conservazione dei prodotti agrari, di pag. XII-426, con 175 incis. . . . . 4 —

Meccanica (La) del macchinista di bordo, per gli ufficiali macchinisti della R. Marina, i Costruttori e i Periti meccanici, gli Allievi degli Istituti Tecnici e Nautici, ecc. di E. GIORLI, con 92 figure 2 50

Meccanica razionale di R. MARCOLONGO.
I. Cinematica-Statica, di pag. XII-271. 3 inc. . . 3 —
II. Dinamica, Principi di Idromecc., di p. VI-324, 24 inc. 3 —

Meccanico (Il), ad uso dei capi tecnici, macchinisti, elet-

L. c.

tric., disegnat., assist., capi operai, condutt. di cald. a vap., scuole ind., E. GIORLI, 4ª ediz. p. xv-423, 204 inc. 3 —

Meccanismi (500), scelti fra i più import. e recenti riferentisi alla dinamica, idraul., idrostat., pneumat., di T. BROWN, trad. F. CERRUTI. 4ª ed. ital., VIII-176, 500 inc. 2 50

Medicamenti — *vedi* Farmacista - Farmacoter. - Impiego ipodermico - Materia medica - Medicat. antis. - Posologia - Sieroterapia.

Medicatura antisettica, di A. ZAMBLER, con prefazione di E. TRICOMI, pag. XVI-124, con 6 incis. 1 50

Medicina legale, di M. CARRARA (In lavoro).

Medicina — *vedi* Acque miner. e term. - Anatomia microscopica - Anatomia topografica - Animali parassiti dell'uomo - Antropometria - Aromatici - Assistenza infermi - Id. pazzi - Batteriologia - Bromatologia - Chimica applicata all'igiene - Chimica clinica - Chimica legale - Chirurgia operativa - Climatologia - Disinfez. (Pratica d.) Elettricità medica - Embriologia - Epilessia - Fisiologia - Fototerapia - Idroterapia - Igiene - Immunità malatt. - Infortuni d. montagna - Legislazione sanitaria - Luce e salute - Malattie dei paesi caldi - Malattie del sangue Malattie infanzia - Malattie sessuali - Massaggio - Medicina legale - Medico pratico - Microbiologia - Microscopio Morte vera e appar. - Nevrastenia - Nutrizione bambini - Organoterapia - Ortofrenia - Ostetricia - Pellagra - Protistologia - Psichiatria - Psicologia fisiolog. - Psicoterapia - Rachitide - Radioterapia - Röntgen Raggi - Semejotica Soccorsi d'urgenza - Spettrofotometria - Tisici e sanatori - Ufficiale sanitario - Veleni - Zoonosi.

Medico pratico, (Il) di C. MUZIO. 3ª ediz. del Nuovo memoriale pei medici pratici, di pag. XVI-492 . . . 5 —

Memoria (L'arte della) — *vedi* Arte.

Mercedi — *vedi* Paga giornaliera.

Merciologia, ad uso delle scuole e degli agenti di commercio, di O. LUXARDO, pag. XII-452 . . . . . . 4 —

Merceologia tecnica, P. E. ALESSANDRI: Vol. I. Materie prime (gregge e semilavorate) di uso commerciale e industriale (in lav.). — Vol. II. Prodotti chimici (inorganici e organici) di uso comm. e industr. (in lav.). — *vedi* Analisi volumetrica - Chimica applicata all'igiene.

Meridiane — *vedi* Gnomonica.

Metalli preziosi, di A. LINONE. Dell'argento: Metallurgia dell'arg. - Arg. puro - Leghe d'arg. - Saggi dell'arg. Dell'oro: Giacimento dell'oro - Affinamento dell'oro - Leghe d'oro - Saggi dell'oro. - Platino: estraz. e leghe di platino - Applicaz. dell'oro e dell'argento - Decorazione dei metalli preziosi, di pag. XI-315 . —

Metallizzazione — *vedi* Galvanizzazione - Galvanoplastica - Galvanostegia.

Metallocromia. Color. e decor. chim. ed elettr. dei metalli, bronz., ossid., preserv. e pul., I. GHERSI. VIII-192 2 50

Metallurgia dell'oro, E. CORTESE, pag. XV-262. con 35 inc. 3 —

Metallurgia — *vedi* Coltivazione delle miniere - Fonditore

L. c.

- Leghe metalliche - Ricettario di metallurgia - Siderurgia - Tempera e cementazione.

Meteorologia generale, di L. DE MARCHI, 2ª ediz. ampliata di pag. XV-225, con 13 figure e 6 tavole . . 1 50

— *vedi anche* Climatologia - Igroscopi.

Metrica dei greci e dei romani, di L. MÜLLER, 2ª ed. italiana confrontata colla 2ª tedesca ed annotata da G. CLERICO, pag. XVI-186 . . . . 1 50

Metrica italiana — *vedi* Ritmica e metrica italiana.

Metrologia Universale ed il **Codice Metrico Internazionale**, coll'indice alfabet. di tutti i pesi misure, monete, ecc. di A. TACCHINI, pag. XX-482 . . . . 6 50

Mezzeria (Man. prat. della) e dei vari sistemi della colonia parziaria in Italia di A. RABBENO, di pag. VIII-196 1 50

Micologia - *vedi* Funghi - Malattie crittog Tartufi e funghi.

Microbiologia. Perchè e come dobbiamo difenderci dai microbi. Malattie infettive. Disinfezioni, Profilassi, di L. PIZZINI, pag. VIII-142. . . . . 2 —

Microscopia — *vedi* Anatomia microscopica - Animali parassiti - Bacologia - Batteriologia - Chimica clinica - Protistologia - Tecnica protistologica.

Microscopio (Il), Guida elementare alle osservazioni di microscopia, di C. ACQUA, (esaurito la 2ª ed. è in lavoro)

Mimica — *vedi* Fisionomia.

Mineralogia generale, di L. BOMBICCI, 3ª ed. per cura di P. VINASSA de REGNY, con 193 figure e due tavole a colori, di pag. XVI-220 . . . . 1 50

Mineralogia descrittiva, di L. BOMBICCI, 2ª ediz., di pag. IV-300, con 119 incis. . . . . 3 —

Miniere (Coltiv. delle), di S. BERTOGLIO, 2ª ed. rifatta del Man. « *Arte Min.* » di V. ZOPPETTI, di p. VIII-284 2 50

Miniere di zolfo — *vedi* Zolfo.

Misurazione delle botti — *vedi* Enologia.

Misure — *vedi* Avarie e sinistri marittimi - Codice del Perito misuratore - Metrologia - Monete - Strum. metrici.

Mitilicoltura — *vedi* Ostricoltura - Piscicoltura.

Mitologia (Dizionario di), di F. RAMORINO. (In lavoro).

Mitologia class. illustr., F. RAMORINO, 2ª ed. corr., 91 inc. 3 —

Mitologia greca, di A. FORESTI: I. *Divinità*, p. VIII-284 1 50
II. *Eroi*, di pag. 188 . . . . 1 50

Mitologie orientali, di D. BASSI:
Vol. I. *Mitologia babilonese-assira*, pag. XVI-219 . 1 50
Vol. II. *Mitologia egiziana e fenicia* (In lavoro).

Mnemotecnia — *vedi* Arte della memoria.

Mobili artistici — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte.

Moda *vedi* Abiti - Biancheria - Fiori artificiali - Trine.

Modellatore meccanico, falegname ed ebanista, di G. MINA, pag. XVII-428, con 293 incis. e 1 tavola. . . 5 50

Molini (L'Industria dei). Costruz., impianti, macinaz., di C. SIBER-MILLOT, 2ª ed. rif., p. XVII-296, 161 inc., 3 tav. 5 —

Monete greche, S. AMBROSOLI, XIV-286, 200 fotoinc., 2 c. g. 3 —

L. c.

Monete papali moderne, di S. AMBROSOLI, in sussidio del CINAGLI, di pag. XII-131, 200 fotoinc. 2 50

Monete (Prontuario delle), **pesi e misure inglesi**, ragguagliate a quelle del sistema decimale, di I. GHERSI, di pag. XII-196, con 47 tabelle di conti fatti e 40 facsimili delle monete in corso 3 50

— *vedi anche* Avarie e sinistri marittimi.

Monete romane, di F. GNECCHI, 2ª ediz. ampliata, di pagine XXVII-370, con 25 tavole e 90 figure . . . . 3 —

Monogrammi, di A. SEVERI, 73 tavole divise in tre serie di due e di tre cifre 3 50

Montatore di macchine — *vedi* Macchine.

Morfologia generale — *vedi* Embriologia.

Morfologia greca. di V. BETTEI, pag. XX-376 . . . . 3 —

Morfologia italiana, di E. GORRA, pag. VI-142. . . . 1 50

Morte (La) **vera e la morte apparente**, con appendice « *La legislazione mortuaria* » di F. DELL'ACQUA, di pag. VIII-136 . . . . 2 —

Mosti (Densità dei), dei vini e degli spiriti ed i problemi che ne dipendono, ad uso degli enochimici, di E. DE CILLIS, di pag. XVI-230, con fig. e 46 tav. 2 —

Motori a gas. Manuale teorico pratico dei motori a gas di carbone fossile - Acetilene - Petrolio - Alcool, con Monografie dei gazogeni per gaz d'acqua - Gaz povero - Gaz Richè, Gaz degli alti forni, Gaz Dowson, Gaz Strache, Gaz Delwich-Fleischer, Gaz Strong, Gaz Jonkers, Gaz d'aria, Gaz Siemens, Gaz Otto, ecc. - Gazogeni ad aspirazione Benier, Taylor, Lencauchez Pierson, Winterthur, ecc. - Gazogeni a combustione rovesciata Gazogeni autoriduttori - Carburatori, ecc. di V. CALZAVARA, di pag. XXXI-423, con 160 incisioni. 4 50

Motori ad esplosione a gas luce e gas povero. Manuale pratico di F. LAURENTI, pag. XII-361 con 162 inc. . 4 50

Motociclista (Man. del), di P. BORRINO. Guida pratica pei dilett. di motocicletta, di p. XI-124, con 38 inc. 2 —

— *vedi* Automobilista - Ciclista.

Muli — *vedi* Razze bovine, ecc.

Municipalizzazione dei servizi pubblici. Legge e regolamento riguardanti l'assunzione diretta dei servizi municipali con note illustr. di C. MEZZANOTTE, p. XX-324 3 —

Musei — *vedi* Amatore oggetti d'arte e curiosità - Amatore majoliche e porcellane - Armi antiche - Pittura - Raccoglitore - Scoltura.

Musica. Espressione e interpretazione di G. MAGRINI. Approv. d. R. Conservatorio di Torino, di pag. VIII-149, con 238 incis. . . . . 2 —

— *vedi* Armonia - Arte e tecnica del canto - Ballo - Cantante - Canto - Chitarra - Contrappunto - Mandolinista - Pianista - Psicologia musicale - Semiografia musicale - Storia della musica - Strumentazione - Strumenti ad arco - Violoncello - Violino e violinisti.

Mutuo soccorso — *vedi* Società mutuo soccorso.

Napoleone I°, di L. CAPPELLETTI, 23 fot. p. XX-272. . 2 50

L. c.

Naso (Malattie del) *vedi* Oto-rino-laringojatria.

Naturalista preparatore (Il) (Imbalsamatore) di R. GESTRO, 3ª ediz. riveduta di pag. XVI-168, con 42 inc. 2 —

Naturalista viaggiatore, di A. ISSEL e R. GESTRO (Zoologia), di pag. VIII-144, con 38 inc. . . . . . . 2 —

Nautica — *vedi* Astronomia nautica - Attrezzatura navale - Avarie e sinistri marittimi - Canottaggio - Codice di marina - Costruttore navale - Disegno e costruzione navi - Doveri macchinista navale - Filonauta - Flotte moderne - Ingegnere navale - Lavori marittimi - Macchinista navale - Marine da guerra - Marino - Meccanica di bordo.

Nautica stimata o Navigazione piana, di F. TAMI, di pag. XXXII-179. con 47 inc.. . . . . 2 50

Neurotteri — *vedi* Imenotteri.

Nevrastenia di L. CAPPELLETTI, di pag. XX-490 . . . 4 —

Nichelatura — *vedi* Galvanostegia.

Notaio (Manuale del), aggiunte le Tasse di registro, di bollo ed ipotecarie, norme e moduli pel Debito pubblico, di A. GARETTI, 5ª ediz. ampliata di p. VIII-383 . 3 50

Numeri — *vedi* Teoria dei numeri.

Numismatica. Atlante numismatico italiano, Monete moderne di S. AMBROSOLI, p. XVI-428, 1746 fotoinc. . . . 8 50

Numismatica (Manuale di), di S. AMBROSOLI, 3ª ediz. riveduta, pag. XVI-250, 250 fotoinc. e 4 tavole . . . 1 50

— *vedi* Atene - Guida numismatica - Monete greche, papali, romane Vocab. numismatico.

Nuotatore (Manuale del), di P. ABBO, p. XII-148, con 97 inc. 2 50

Nutrizione del bambino. Allattamento naturale ed artificiale, di L. COLOMBO, pag. XX-228, con 12 inc. . . 2 50

Oceanografia, di G. MAGRINI (In lavoro).

Occultismo, di N. LICÒ, di pag. XVI-328, con tav. illustr. 3 —

— *vedi* Chiromanz. - Magnetismo - Spiritismo - Telepatia.

Oculistica — *vedi* Igiene della vista - Ottica.

Odontologia — *vedi* Igiene della bocca.

Olandese (lingua) — *vedi* Dizionario - Grammatica.

Olii vegetali, animali e minerali, loro applicazioni di G. GORINI, 2ª ediz. completamente rifatta da G. FABRIS, di pag. VIII-214, con 7 incis. . . . . . . 2 —

Olivo ed olio. Coltivazione dell'olivo, estrazione, purificazione e conservazione dell'olio, di A. ALOI, 5ª ed. accresciuta e rinnovata, di p. XVI-365, con 65 inc. . 3 —

Omero, di W. GLADSTONE, traduzione di R. PALUMBO, e C. FIORILLI, di pag. XII-196 . . . . 1 50

Onde Hertziane *vedi* Telegrafo senza fili

Operaio (Manuale dell'). Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili agli operai tornitori, fabbri, calderai, fonditori di metalli, bronzisti aggiustatori e meccanici, di G. BELLUOMINI, 6ª ediz. di p. XVI-272. . . 2 —

Operaio elettrotecnico (Manuale pratico per l'), di G. MARCHI, 2ª ed. di pag. XX-410, con 265 inc. . . . 3 —

Operazioni doganali - *vedi* Codice dogan. - Trasporti e tariffe.

Opere pie — *vedi* Enciclopedia amministrativa.

L. c.

Oratoria — *vedi* Arte del dire - Rettorica - Stilistica.
Orchidee, di A. PUCCI, di pag. VI-303, con 95 inc. . 3 —
Ordinamento degli Stati liberi d'Europa, di F. RACIOPPI, 2ª ediz. di pag. XII-316 . . . . 3 —
Ordinamento degli Stati liberi fuori d'Europa, di F. RACIOPPI, di pag. VIII-376 . . . . 3 —
Ordinamento giudiziario — *vedi* Leggi sull'.
Orecchio (**Malattie dell'**) — *vedi* Oto-rino-laringojatria.
Orefice (**Manuale per l'**) Seconda edizione del manuale « Gioielleria oreficeria » di E. BOSELLI. Metalli utensili, pietre, valute e monete, tariffe doganali, marchio dell'oreficeria; a cura di F. BOSELLI, p. XI-370. 4 —
Oreficeria — *vedi* Leghe metall. - Met. preziosi - Saggiatore.
Organoterapia, di E. REBUSCHINI, pag. VIII-432 . . . 3 50
Oriente antico — *vedi* Storia antica.
Orine - *vedi* (Analisi delle) Chimica clinica.
Ornatista (Manuale dell'), di A. MELANI. Raccolta di iniziali miniate e incise, d'inquadrature di pagina, di fregi e finalini, esistenti in opere antiche di biblioteche, musei e collezioni private. XXVIII tavole in colori per miniatori calligrafi, pittori di insegne, ricamatori incisori, disegnatori di caratteri, ecc. 2ª ed. 4 50
Ornitologia italiana (Manuale di), di E. ARRIGONI degli ODDI. Elenco descrittivo degli uccelli stazionari o di passaggio finora osservati in Italia. di pag. 907 con 36 tavole e 401 inc. da disegni originali . . . . . 15 —
Oro — *vedi* Alligaz. - Metalli prez. - Metallurgia dell'oro.
Orologeria moderna, di E. GARUFFA, p. VIII-302, 276 inc. 5 —
Orologi artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte.
Orologi solari — *vedi* Gnomonica.
Orticoltura, di D. TAMARO, 3ª edizione rifatta di pag. XVI-598, con 128 incis. 4 50
Ortocromatismo — *vedi* Fotografia.
Ortoepia e ortografia italiana moderna, di G. MALAGOLI di pag. XVI-193 . . . . 1 50
Ortofrenia (Manuale di), per l'educazione dei fanciulli frenastenici o deficienti (idioti, imbecilli, tardivi, ecc.) di P. PARISE, di pag. XII-231 . . . . 2 —
Ortografia — *vedi* Ortoepia.
Ortotteri — *vedi* Imenotteri ecc.
Ossidazione — *vedi* Metallocromia.
Ostetricia (Manuale di). *Ginecologia minore*, per le levatrici, di L. M. BOSSI, di pag. XV-493. con 113 inc. 4 50
Ostricoltura e mitilicoltura, di D. CARAZZI, pag. VIII-202 2 50
Oto-rino-laringoiatria — *vedi* Malattie dell'orecchio, del naso e della gola.
Ottica, di E. GELCICH, pag. XVI-576, 216 inc. e 1 tav. 6 —
Ottone — *vedi* Leghe metalliche.
Paga giornaliera (Prontuario della), **da cinquanta centesimi a cinque lire**, di G. NEGRIN, di pag. XI-222. 2 50

L. c.

Paleoetnologia di J. REGAZZONI, di pag. XI-252 con 10 inc. 1 50
Paleografia, di E. M. THOMPSON, traduzione dall'inglese, con aggiunte e note di G. FUMAGALLI, 2ª ed. rifatta di pag. XII-178, con 30 inci e 6 tav.. . . . 2 —
Paleografia musicale — *vedi* Semiografia.
Paleontologia (Compendio di), di P. VINASSA DE REGNY di pag. XVI-512 con 356 figure 5 50
Pallone (Giuoco del) — *vedi* Giuoco.
Pane (Il) e la panificazione di G. ERCOLANI (in lavoro).
Parafulmini — *vedi* Elettricità - Fulmini.
Parassiti dell'uomo — *vedi* Animali.
Parrucchiere (Manuale del), di A. LIBERATI, 1904, di pag. XII-219, con 88 inc. 2 50
Pasticcere e confettiere moderno, di G. CIOCCA (in lav.)
Patate (Le) di gran reddito. Loro coltura, loro importanza nell'alimentaz. del bestiame, nell'economia domest. e negli usi industr., di N. ADUCCI, p. XXIV-221, c. 20 inc. 2 50
Pazzia — *vedi* Assistenza pazzi - Psichiatra - Grafologia.
Pecore — *vedi* Razze bovine, ecc.
Pedagogia — *vedi* Balbuzie - Campicello scolastico - Didattica - Giardino infantile - Igiene scolastica - Ortofrenia - Sordo muto.
Pediatria — *vedi* Nutrizione del bambino - Ortopedia - Terapia - Malattie infanzia.
Pellagra (La), Storia, eziologia, patogenesi, profilassi, di G. ANTONINI, di pag. VIII-166 con 2 tav. . . . 2 —
Pelle (Malattie della) — *vedi* Igiene della
Pelli — *vedi* Concia delle pelli
Pensioni — *vedi* Società di mutuo soccorso.
Pepe — *vedi* Prodotti agricoli.
Perfosfati — *vedi* Fosfati - Concimi - Chimica agraria.
Perizia e stima — *vedi* Assicurazioni - Avarie - Codice del perito misuratore - Estimo.
Pesci — *vedi* Ittiologia - Ostricoltura - Piscicoltura.
Pesi e misure — *vedi* Avarie e sinistri marittimi - Metrologia - Misure e pesi inglesi - Monete - Strumenti metrici - Tecnologia monetaria.
Pescatore (Man. del) di L. MANETTI. p. XV-241 c. 107 inc. 2 50
Peso dei metalli, ferri quadrati, rettangolari-cilindrici, a squadra, a U, a Y, a Z, a T e a doppio T, e delle lamiere e tubi di tutti i metalli, di G. BELLUOMINI, 2ª ediz. di pag. XXIV-248 . . . . 3 50
Pianista (Manuale del), di L. MASTRIGLI, pag. XVI-112 2 —
Piante e fiori sulle finestre, sulle terrazze e nei cortili. Coltura e descrizione delle principali specie di varietà, di A. PUCCI, 3ª ed. rived., p. VIII-214, e 117 inc. . 2 50
Piante industriali. Delle piante zuccherine in generale. — Piante saccarifiche — Piante alcooliche — Piante narcotiche - Piante aromatiche e profumate - Piante tintorie - Piante da concia - Piante tessili - Piante da carta - Piante da cardare - Piante da spazzole e scope - Piante da legare o intrecciare - Piante da

L. c.

soda - Piante medicinali - Piante da diversi impieghi, 3ª ed. rifatta da A. ALOI, del manuale « Piante industriali » del GORINI, di pag. XI-274, con 64 inc. . . 2 50

Piante tessili (Coltivazione ed industrie delle), propriamente dette e di quelle che danno materia per legacci, lavori di intreccio, sparteria, spazzole, scope, carta, ecc., coll'aggiunta di un dizionario delle piante ed industrie tessili, di oltre 3000 voci, di M. A. SAVORGNAN D'OSOPPO, di pag. XII-476, con 72 inc. . . 5 —

Pietre artificiali — *vedi* Imitazioni

Pietre preziose, classificazione, valore, arte del giojelliere, di G. GORINI, (esaurito, è in lavoro la 3ª ediz.)

Pirotecnia moderna, di F. DI MAIO, 2ª edizione riveduta ed ampliata, di pag. XV-183 con 21 inc. . . . 2 50

Piscicoltura d'acqua dolce, di E. BETTONI, di pagine VIII-318, con 85 inc. . . . . 3 —

Pittura ad olio, acquerello e miniatura (Man. per dilettante di), (paesaggio, figura e fiori) di G. RONCHETTI, di p. XVI-239, 29 inc. e 24 tav. 4 50

Pittura italiana antica e moderna, di A. MELANI, 2ª ediz. rifatta, di pag. XXX-430 con 23 inc. e 137 tav. 7 50

— *vedi* Anatomia pittorica - Colori e pittura - Decoraz. - Disegno - Luce e colori - Ristauratore dipinti - Scenografia.

Plastica — *vedi* Imitazioni.

Pneumonite crupale con speciale riguardo alla sua cura di A. SERAFINI, di pag. XVI-222 . . . . 2 50

Polizia sanitaria degli animali (Manuale di), d A. MINARDI, di pag. VIII-333, con 7 inc. . . . . 3 —

Pollicoltura, di G. TREVISANI, 5ª ediz. rifatta, di pag. XVI-230, con 90 incis. 2 50

Polveri piriche — *vedi* Esplodenti — Pirotecnia.

Pomologia, descrizione delle migliori varietà di Albicocchi, Ciliegi, Meli, Peri, Peschi, di G. MOLON, con 86 incis. e 12 tavole colorate, di pag. XXXII-717 . . . 8 50

Pomologia artificiale, secondo il sistema Garnier-Valletti, di M. DEL LUPO, pag. VI-132, e 34 inc. . . . . . 2 —

Poponi — *vedi* Frutta minori.

Porcellane - *vedi* Maioliche - Ricettario domestico.

Porco (Allevamento del) — *vedi* Maiale.

Porti di mare — *vedi* Lavori marittimi.

Posologia (Prontuario di) dei rimedi più usati nella terapia infantile di A. CONELLI, di pag. VIII-186. . . 2 —

— *vedi* Impiego ipodermico.

Posta. Manuale postale, di A. PALOMBI. Notizie storiche sulle Poste d'Italia, organizzazione, legislazione, posta militare, unione postale universale, con una appendice relativa ad alcuni servizi access., pag. XXX-309 3 —

Prato (Il), di G. CANTONI, di pag. 146, con 13 inc. . 2 —

Prealpi bergamasche (Guida-itinerario alle), compresa la Valsassina ed i Passi alla Valtellina ed alla Valcamo-

L. c.

nica, colla prefaz. di A. STOPPANI, e cenni geologici di A. TARAMELLI, 3ª ediz. rifatta per cura della Sezione di Bergamo del C. A. I., con 15 tavole, due carte topografiche, ed una carta e profilo geologico. Un vol. di p. 290 e un vol. colle carte topografiche in busta . 6 50

Pregiudizi — *vedi* Errori e pregiudizi - Leggende popolari.

Prestiti ipotecari — *vedi* Estimo dei terreni.

Previdenza — *vedi* Assicuraz. - Cooperazioni - Società di M. S.

Privative industriali — *vedi* Codice e leggi d'Italia Volume IV.

Procedura civile - Procedura penale — *vedi* Codici.

Procedura privilegiata fiscale per la riscossione delle imposte dirette — *vedi* Esattore.

Procedura dei piccoli fallimenti — *vedi* Curat. dei fallimenti.

Processi fotomeccanici (I moderni). Fotocollografia, fototipogr. fotocalcografia, fotomodellatura, tricromia, di R. NAMIAS, di p. VIII-316, 53 fig., 41 illust. e 9 tavole . 3 50

Prodotti agrari — *vedi* Conservazione dei.

Prodotti agricoli del Tropico (Manuale pratico del piantatore), di A. GASLINI. (Il caffè, la canna da zucchero, il pepe, il tabacco, il cacao, il tè, il dattero, il cotone, il cocco, la coca, il baniano, l'aloè, l'indaco, il tamarindo, l'ananas, l'albero d. chinino, la juta, pag. XVI-270 2 —

Produzione e commercio del vino in Italia, di S. MONDINI, di pag. VII-303 . . . . 2 50

Profumiere (Manuale del), di A. ROSSI, con 700 ricette pratiche, di pag. IV-476 e 58 inc. . . . . 5 —

— *vedi anche* Ricettario domes. - Ricettario indust. - Saponi.

Proiezioni (Le), Materiali, Accessori, Vedute a movimento, Positive sul vetro, Proiezioni speciali, policrome, stereoscopiche, panoramiche, didattiche, ecc. di L. SASSI, di pag. XVI-447, con 141 inc. . . . . 5 —

— *vedi* Cinematografo.

Proiezioni ortogonali — *vedi* Disegno.

Prontuario di geografia e statistica, di G. GAROLLO, p. 62 1 —

Prontuario per le paghe — *vedi* Paghe - Conti fatti.

Proprietà letteraria, artistica e industriale — *vedi* Leggi.

Proprietario di case e di opifici. Imposta sui fabbricati, di G. GIORDANI, di pag. XX-264 . . . . 1 50

Prosodia — *vedi* Metrica dei greci e dei romani - Ritmica.

Prospettiva (Manuale di), di L. CLAUDI, 2ª ediz. riveduta di pag. XI-61 con 28 tavole. . . . . 2 —

Protezione degli animali (La), di N. LICÒ, p. VIII-200 . 2 —

Protistologia di L. MAGGI, 2ª ediz. p. XVI-278 con 93 inc. 3 —

Proverbi in 4 lingue — *vedi* Dottrina popolare.

Proverbi (516) sul cavallo, raccolti ed annotati da C. VOLPINI, di pag. XIX-172 . . . . 2 50

Psichiatra. Confini, cause e fenomeni della pazzia. Concetto, classificazione, forme cliniche o diagnosi delle materie mentali. Il manicomio, di J. FINZI. p. VIII-225 2 50

— *vedi* Antropologia criminale.

Psicologia, di C. CANTONI, pag. VIII-168, 2ª ediz. . . 1 50

L. c.

Psicologia fisiologica, di G. MANTOVANI, 2ª ediz. riveduta, di pag. XII-175. con 16 inc. 1 50
Psicologia musicale. Appunti, pensieri e discussioni, di M. PILO, di pag. X-259 . . . . 2 50
Psicoterapia, di G. PORTIGLIOTTI, di pag. XII-318, 22 inc. 3 —
Pugilato e lotta per la difesa personale, Box inglese e francese, di A. COUGNET, pag. XXIV-198, con 104 inc. 2 50
Raccoglitore (Il) **di oggetti minuti e curiosi**. Almanacchi, Anelli, Armi, Bastoni, Biglietti d'ingresso, d'invito, di visita, Calzat., Chiavi, Cartelloni, Giarrettiere, Orologi, Pettini, ecc., di J. GELLI, p. X-344, con 310 inc. 5 50
Rachitide (La) **e le deformità da essa prodotte**, di P. MANCINI, di pag. XXVIII-300, con 116 fig. nel testo . 4 —
Radioattività di G. A. BLANC (in lavoro).
Radiografia — *vedi* Raggi Röntgen.
Radioterapia — *vedi* Elettricità medica - Luce e salute
Ragioneria, di V. GITTI, 4ª ediz. riveduta, di pagine VIII-141 con 2 tavole 1 50
Ragioneria delle cooperative di consumo (Manuale di), di G. ROTA, di pag. XV-408. . . . . 3 —
Ragioneria industriale (Aziende industriali), di O. BERGAMASCHI, 2ª ediz. di pag. XII-392, e tabelle . . . 4 —
Ragioniere (Prontuario del). (Manuale di calcolazioni mercantili e bancarie), di E. GAGLIARDI, pap. XII-603 6 50
Ramatura — *vedi* Galvanostegia.
Razze bovine, equine, suine, ovine e caprine, di F. FAELLI di p. XX-372, con 75 illustr., delle quali 16 colorate 5 50
Rebus — *vedi* Enimmistica.
Reclami ferroviarii — *vedi* Trasporti e tariffe.
Registro e Bollo — *vedi* Leggi sulle tasse di.
Regolo calcolatore e sue applicazioni nelle operazioni topografiche, di G. POZZI, di pag. XV-238 con 182 incisioni e 1 tavola 2 50
Religione — *vedi* Bibbia - Buddismo - Diritto ecclesiastico - Imitazione di Cristo.
Religioni e lingue dell'India inglese, di R. CUST, tradotto da A. DE GUBERNATIS, di pag. IV-124 . . . . . . 1 50
Resistenza dei materiali e stabilità delle costruzioni, di P. GALLIZIA, 2ª ediz. rifatta da C. SANDRINELLI di pag. XXIV-476 con 269 incisioni 5 50
Resistenza (Momenti di) **e pesi di travi metalliche composte**. Prontuario ad uso degli Ingegneri, Architetti e costruttori, con 10 figure ed una tabella per la chiodatura di E. SCHENCK, di pag. XIX-188 . . . . . 3 5
Responsabilità — *vedi* Codice dell'ingegnere.
Rettili — *vedi* Zoologia.
Rettorica, ad uso delle Scuole, di F. CAPELLO, di p. VI-122 1 5
Ribes — *vedi* Frutta minori.
Ricami — *vedi* Biancheria - Macchine da cucire - Monogrammi - Piccole industrie - Ricettario domestico - Trine
Ricchezza mobile, di E. BRUNI, pag. VIII-218 . . . 1 [illegible]

L. c.

Ricettario domestico, di I. GHERSI. Adornamento della casa. Arti del disegno. Giardinaggio. Conservazione di animali, frutti, ortaggi, piante. Animali domestici e nocivi. Bevande. Sostanze alimentari. Combustibil e illuminazione. Detersione e lavatura, smacchiatura. Vestiario. Profumeria e toeletta Igiene e medicina. Mastici e plastica. Colle e gomme. Vernici ed encaustici. Metalli. Vetrerie, 3ª ediz rifatta da A. CASTOLDI. pag. XVI-854. con 4280 ricette e 59 incis. 7 50

Ricettario industriale, di I. GHERSI. Procedimenti utili nelle arti, industrie e mestieri, caratteri; saggio e conservazione delle sostanze naturali ed artificiali di uso comune; colori, vernici, mastici, colle, inchiostri, gomma elastica, materie tessili, carta, legno. fiammiferi, fuochi d'artificio, vetro; metalli, bronzatura, nichelatura, argentatura, doratura, galvanoplastica, incisione, tempera. leghe; filtrazione; materiali impermeabili, inconbustibili, artificiali; cascami, olii. saponi, profumeria, tintoria, smacchiatura, imbianchimento; agricoltura, elettricità; 4ª ediz. riveduta e corretta dell'Ing. P. MOLFINO, pag. VII-704 con 27 incis e 2887 ricette. 6 50

Ricettario fotografico, 3ª ed. di L. SASSI, pag. XXIV-229 2 —

Ricettario pratico di metallurgia. Raccolta di cognizioni utili ed indispensabili, dedicato agli studiosi e agli operai meccanici, aggiustatori, tornitori, fabbri ferrai, ecc. di G. BELLUOMINI, di pag. XII-328. . . . 3 50

Rilievi — *vedi* Cartografia - Compens. errori - Telemetria.

Rimboschimento — *vedi* Consorzi di difesa del suolo - Selvicoltura.

Rimedi — *vedi* Impiego ipodermico - Mat. medica - Posologia

Risorgimento italiano (Storia del) **1814-1870,** con l'aggiunta di un sommario degli eventi posteriori, di L. BERTOLINI, 2ª ediz. di pag. VIII-208 . . . . . . 1 50

Ristauratore dei dipinti (Il), di G. SECCO-SUARDO, 2 volumi, di pag. XVI-269, e XII-362 con 47 inc. . . . 6 —

Ritmica e metrica razionale italiana, di R. MURARI, di pag. XVI-216 . . . . 1 50

Rivoluzione francese (La) (1789-1799), di G. P. SOLERIO di pag. IV-176 . . . . 1 50

Roma antica — *vedi* Antichità private - Antichità pubbliche - Archeologia d'arte etrusca e romana - Mitologia - Monete - Topografia.

Röntgen (I raggi di) **e le loro pratiche applicazioni,** di I. TONTA, di pag. VIII-160, con 65 inc. e 14 tavole . 2 50
- *vedi* Elettrecità medica - Fototerapia e radioterapia.

Rose (Le). Storia, coltivazione, varietà, di G. GIRARDI, di pag. XVIII-284, con 96 illustr. e 8 tav. cromolit. . 3 50

Rum -- *vedi* Liquorista.

Saggiatore (Man. del), di F. BUTTARI, di pag. VIII-245. 2 50

Sale (Il) e le saline, di A. DE GASPARIS. (Processi industriali, usi del sale, prodotti chimici, industria manifatturiera, industria agraria, il sale nell' economia pubblica e nella legislazione), di pag. VIII-358, 24 inc. 3 50

Salsamentario (Manuale del) di L. MANETTI, di pagine 224, con 76 incisioni . . . . 2 —

L. c.

— *vedi* Imitazioni.

Sfere cosmografiche e loro applicazione alla risoluzione di problemi di geografia matem., A. ANDREINI (in lav.).

Sicurezza pubblica — *vedi* Leggi di sanità.

Siderurgia (Man. di), V. ZOPPETTI, pubblicato e completato per cura di E. GARUFFA, di p. IV-368, con 220 incis. 5 50

Sieroterapia, di E. REBUSCHINI, di pag. VIII-424 . . 3 —

Sigle epirafiche — *vedi* Dizionario di abbreviature.

Sindaci (Guida teorico-pratica pei), Segretari comunali e provinciali e delle opere pie, di E. MARIANI — *vedi* Enciclopedia amministrativa.

Sinistri marittimi — *vedi* Avarie.

Sintassi francese, razionale pratica, arricchita della parte storico-etimologica, della metrica, della fraseologia commerciale ecc., di D. RODARI, di pag. XVI-206. . 1 50

Sintassi francese — *vedi* Esercizi sintattici.

Sintassi greca, di V. QUARANTA, di pag. XVIII-175. . 1 50

Sintassi latina, di T. G. PERASSI, di pag. VII- 168. . 1 50

Sismologia, di L. GATTA, di pag. VIII-175, con 16 incis. 1 50

Smalti — *vedi* Amatore d'oggetti d'arte - Fotosmaltografia - Ricettario industriale.

Soccorsi d'urgenza, di C. CALLIANO, 6ª ediz. riveduta ed ampliata, di pag. XL-428, con 134 incis. e 1 tav. . 3 50

— *vedi* Infortuni della montagna.

Socialismo, di G. BIRAGHI, di pag. XV-285 . . . . . 3 —

Società di mutuo soccorso. Norme per l'assicurazione delle pensioni e dei sussidi per malattia e per morte di G. GARDENGHI, di pag. VI-152. . . . . 1 50

Società industriali italiane per azioni, di F. PICCINELLI, di pag. XXXVI-534 . . . . 5 50

— *vedi* Debito pubblico - Prontuario del ragioniere - Valori pubblici.

Sociologia generale (Elementi di), di E. MORSELLI, di pag. XII-172 . . . . 1 50

Soda caustica, cloro e clorati alcalini per elettrolisi. Fabbricaz. chimica, P. VILLANI, p. VIII-314, e una tav. 3 50

Sorbettiere — *vedi* Caffettiere.

Sonno — *vedi* Igiene del.

Sordomuto (Il) e la sua istruzione. Manuale per gli allievi e allieve delle R. Scuole normali, maestri e genitori, di P. FORNARI, di pag. VIII-232, con 11 inc. 2 —

— *vedi anche* Ortofrenia.

Sostanze alimentari — *vedi* Conservazione delle.

Specchi (Fabbricazioni degli) **e la decorazione del vetro e cristallo**, di R. NAMIAS, di p. XII-156 con 14 incis. . 2 —

— *vedi* Fotomaltografia - Vetro.

Speleologia. Studio delle caverne, C. CASELLI, p. XII-163 1 50

Spettrofotometria (La) applicata alla Chimica fisiologica, alla Clinica e alla Medicina legale, di G. GALLERANI, di pag. XIX-395, con 92 incisioni e tre tavole . . . 3 50

Spettroscopio (Lo) **e le sue applicazioni**, di R. A. PRO-

L. c.

CTOR, traduzione con note ed aggiunte di F. PORRO di pag. VI-179, con 71 inc. e una carta di spettri . 1 50

Spiritismo, di A. PAPPALARDO. Terza edizione aumentata, con 9 tavole, di pag. XVI-226 . . . . 2 —

— *vedi anche* Magnetismo - Occultismo - Telepatia.

Spirito di vino — *vedi* Alcool - Cognac - Distillaz. - Liquorista.

Sport — *vedi* Acrobatica e atletica - Alpinismo - Automobilista - Ballo - Biliardo - Cacciatore - Cane - Canottaggio - Cavallo - Ciclista - Codice cavalleresco - Corse - Dizionario alpino - Duellante - Filonauta - Furetto (Il) - Ginnastica - Giuochi ginnastici - Giuoco del pallone - Infort. di mont. - Lawn-Tennis - Motociclista - Nuotatore - Pescatore - Proverbi sul cavallo - Pugilato - Scherma.

Stagno (Vasellame di) — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità - Leghe metalliche.

Stampa dei tessuti — *vedi* Industria tintoria.

Stampaggio a caldo e bolloneria, di G. SCANFERLA, di pag. VIII-160, con 62 incisioni . . . . 2 —

Stabilità delle costruzioni — *vedi* Resistenza dei materiali - Resistenza e pesi di travi metalliche.

Stabilimenti balneari — *vedi* Acque minerali.

Statica — *vedi* Metrologia - Strumenti metrici.

Statistica, di F. VIRGILII, 3ª ed. rifatta, di p. XIX-225 . 1 50

Stearineria (L'industria stearica). Manuale pratico di E. MARAZZA, di pag. XI-284, con 70 incisioni . . . 5 —

Stelle — *vedi* Astron. - Cosmogr. - Gravitaz. - Spettroscopio.

Stemmi — *vedi* Araldica - Numismatica - Vocab. araldico.

Stenografia, di G. GIORGETTI (secondo il sistema Gabelsberger-Noè), 3ª edizione rifatta di pag. XV-239 . 3 —

Stenografia, (Guida per lo studio della) sistema Gabelsberger-Noè, compilata in 35 lezioni da A. NICOLETTI, 5ª edizione riveduta e corretta, di pag. XV-160 . . 1 50

Stenografia. Esercizi graduali di lettura e di scrittura stenografica (sistema Gabelsberger-Noè), di A. NICOLETTI, 3ª edizione di pag. VIII-160 . . . . 1 50

— *vedi anche* Antologia stenografica - Diz. stenografico.

Stenografo pratico (Lo) di L. CRISTOFOLI, di pag. XII-131 1 50

Stereometria applicata allo sviluppo dei solidi e alle loro costruzioni in carta, di A. RIVELLI, di pag. 90, con 92 incisioni e 41 tavole . . . . 2 —

Stilistica, di F. CAPELLO, di pag. XII-164 . . . . . 1 50

Stilistica latina, di A. BARTOLI, di pag. XII-210 . . . 1 50

Stimatore d'arte — *vedi* Amatore oggetti d'arte - Amatore di maioliche - Armi antiche Raccoglitore di oggetti.

Stomatojatria. — *vedi* Oto-rino-laringojatria.

Storia ant. Vol. I. *L'oriente ant.*, di I. GENTILE, p. XII-232 1 50
Vol. II. *La Grecia*, di G. TONIAZZO, di pag. IV-216 1 50

Storia dell'Arte. di G. CAROTTI. (In lavoro).

Storia dell'Arte militare antica e moderna, del Cap. V. ROSSETTO, con 17 tavole illustr. di pag. VIII-504 . . 5 50

Storia dell'arte militare — *vedi* Armi antiche.

Storia e cronologia medioevale e moderna, in CC tavole

L. c.

Tabacchiere — *vedi* Amatore di oggetti d'arte - Raccoglitore di oggetti.
Tacheometria — *vedi* Celerimensura - Telemetria - Topografia - Triangolazioni.
Tannini (I) nell'uva e nel vino, di R. AVERNA-SACCÀ, di pag. VIII-240 . . . . 2 50
Tapioca — *vedi* Fecola.
Tariffe ferroviarie — *vedi* Codice doganale - Trasporti e tariffe.
Tartufi (I) **e i funghi**, loro natura, storia, coltura, conservaz. e cucinatura, di FOLCO BRUNI, pag. VIII-184 2 —
Tasse di registro, bollo, ecc. — *vedi* Codice di bollo - Esattore - Imposte - Leggi, tasse registro e bollo - Notaio - Ricchezza mobile.
Tassidermista -- *vedi* Imbalsamat. - Naturalista viaggiatore.
Tatuaggio — *vedi* Chiromanzia e tatuaggio.
Tavole logaritmiche — *vedi* Logaritmi.
Tè — *vedi* Prodotti agricoli.
Teatro — *vedi* Letteratura drammatica - Codice del teatro
Tecnica microscopica — *vedi* Anat. microscop. - Microscopio.
Tecnica protistologica, di L. MAGGI, di pag. XVI-318 . 3 —
Tecnologia — *vedi* Dizionario tecnico.
Tecnologia meccanica -- *vedi* Modellatore meccanico.
Tecnologia e terminologia monetaria, di G. SACCHETTI, di pagine XVI-191 . . . . 2 —
Telefono (Il), di G. MOTTA. Sostituisce il manuale. « Il telefono » di D. V. PICCOLI), p. 327, con 149 inc. e 1 tav. 3 50
Telegrafia, elettrica, aerea, sottomarina e senza fili, di R. FERRINI, 3ª edizione corretta ed accresciuta, di pagine VIII-322, con 104 incisioni 2 50
— *vedi* Cavi telegrafici.
Telegrafo senza fili e **Onde Hertziane**, di O. MURANI, di pag. XV-341, con 172 incisioni. . . , ... 3 50
Telemetria, misura delle distanze in guerra, di G. BERTELLI, di pag. XIII-145, con 12 zincotipie. . . . . 2 —
Telepatia (Trasmissione del pensiero), di A. PAPPALARDO. 2ª edizione, di pag. XVI-279. . . . . . . 2 50
— *vedi anche* Magnetismo e Ipnotismo - Occultismo - Spiritismo.
Tempera e cementazione, di S. FADDA, di pag. VIII-108, con 20 incisioni . . . . 2 —
Teoria dei numeri (Primi elementi della), di U. SCARPIS, di pagine VIII -152 . . . . 1 50
Teoria delle ombre, con un cenno sul chiaroscuro e sul colore dei corpi, E. BONCI, p. VIII-164, 36 tav. e 62 fig. 2 —
Termodinamica, di G. CATTANEO. di pag.X-196, 4 fig. . 1 50
Terremoti — *vedi* Sismologia - Vulcanismo.
Terreni — *vedi* Chimica agraria - Concimi - Humus.
Terreno agrario. Manuale di Chimica del terreno, di A. FUNARO, di pag. VIII-200 . . . . 2 —
Tessitore (Manuale del), di P. PINCHETTI, 2ª edizione riveduta, di pag. XVI-312, con illustrazioni 3 50

L. c.

Tessuti di lana e di cotone (Analisi e fabbricazione dei). Manuale pratico razionale, di O. GIUDICI, di pagine XII-864 con 1098 incisioni colorate 16 50

Testamenti (Manuale dei), per cura di G. SERINA, 2ª edizione riveduta ed aumentata di pag. XV-312 . . 3 —

Tigrè-italiano (Manuale), con due dizionarietti italiani-tigrè e tigrè-italiano ed una cartina dimostrativa degli idiomi parlati in Eritrea, di M. CAMPERIO, di p. 180 . 2 50

Tintore (Manuale del), di R. LEPETIT, 4ª ediz. di pag. XVI-466, con 20 incisioni. . . . . 5 —

Tintoria – *vedi* Industria tintoria.

Tintura della seta, studio chimico tecnico, di T. PASCAL, di pagine XVI-432 . . . . 5 —

Tipografia (Vol. I). Guida per chi stampa e fa stampare. Compositori, Correttori, Revisori, Autori ed Editori, di S. LANDI, di pagine 280. . . . . 2 50

Tipografia (Vol. II). Lezioni di composizione ad uso degli allievi e di quanti fanno stampare, di S. LANDI, di pagine VIII-271, corredato di figure e di modelli . . 2 50

— *vedi anche* Vocabolario tipografico.

Tisici e sanatorii (La cura razionale dei), di A. ZUBIANI, prefaz. di B. SILVA, pag. XLI-240, 4 inc. . . 2 —

Titoli di rendita – *vedi* Debito pubblico - Valori pubblici.

Topografia e rilievi — *vedi* Cartografia - Catasto - Celerimensura - Codice d. perito - Compensazioni errori - Curve - Disegno topografico - Estimo terreni - Estimo rurale - Fotogrammetria - Geometria pratica - Prospettiva - Regolo calcolatore - Telemetria - Triangolazioni.

Topografia di Roma antica, di L. BORSARI, di pag. VIII-436, con 7 tavole 4 50

Torcitura della seta — *vedi* Filatura.

Tornitore meccanico (Guida pratica del), ovvero sistema unico per calcoli in generale sulla costruzione di viti e ruote dentate, di S. DINARO, 3ª ediz., di pag. X-147 2 —

Tossicologia – *vedi* Analisi chimica - Chimica legale - Veleni.

Traduttore tedesco (Il), compendio delle principali difficoltà grammaticali della Lingua Tedesca, di R. MINUTTI, di pag. XVI-224 . . . . 1 50

Trasporti, tariffe, reclami ferroviari ed operazioni doganali. Manuale pratico ad uso dei commercianti e privati, colle norme per l'interpretazione delle tariffe vigenti, di A. G. BIANCHI, 2ª ediz. rifatta, p. XVI-208 2 —

Travi metallici composti — *vedi* Resistenza.

Trazione a vapore sulle ferrovie ordinarie, di G. OTTONE, di pag. LXVIII-469. . . . . 4 50

Triangolazioni topografiche e triangolazioni catastali, di O. JACOANGELI, Modo di fondarle sulla rete geodetica, di rilevarle e calcolarle, di pag. XIV-340, con 32 incisioni, 4 quadri, 32 modelli pei calcoli 7 50

Trigonometria piana (Esercizi ed applicazione di), con

L. c.

400 esercizi e problemi proposti da C. ALASIA, pag. XVI-292, con 30 incisioni 1 50

Trigonometria — *v.* Celerimensura - Geom. metr. - Logaritmi.

Trigonometria della sfera — *vedi* Geom. e trigonom. della.

Trine (Le) **a fuselli in Italia.** Loro origine, discussione, confronti, cenni bibliografici, analisi, divisione, istruzioni tecnico-pratiche con 200 illustrazioni nel testo di GIACINTA ROMANELLI-MARONE, di pag. VIII-331 . 4 50

Tubercolosi (La) di M. VALTORTA e G. FANOLI, con prefazione del Prof. AUGUSTO MURRI, ed illustr. (In lav.).

— *vedi* Tisici.

Uccelli — *vedi* Ornitologia.

Uccelli canori (I nostri migliori). Loro caratteri e costumi. Modo di abituarli e conservarli in schiavitù. Cura delle loro infermità. Maniera per ottenere la produz. del Canarino, di L. UNTERSTEINER, p. XII-175 2 —

Ufficiale (Manuale dell') del Regio Esercito Italiano, di U. MORINI, di pag. XX-388 . . . . 3 50

Ufficiale sanitario (Manuale dell'), di C. TONZIG e G. RUATA (In lavoro).

Unità assolute. Definizione, Dimensioni, Rappresentazione, Problemi, di G. BERTOLINI, pag. X-124 . . . 2 50

Urina (L') **nella diagnosi delle malattie.** Trattato di chimica e microsc. clinica dell'urina, F. JORIO, p. XVI-216 2 —

Usciere — *vedi* Conciliatore.

Usi mercantili (Gli). Raccolta di tutti gli usi di piazza riconosciuti dalle Camere di Commercio ed Arti in Italia, di G. TRESPIOLI, di pag. XXXVI-696 . . . . 6 —

Uva spina — *vedi* Frutta minori.

Uve da tavola. Varietà, coltivazione e commercio, di D. TAMARO, 3ª ediz., di pag. XVI-278, con tav. colorate, 7 fototipie e 57 incisioni . . . . 4 —

Valli lombarde — *vedi* Diz. alpino - Prealpi bergamasche.

Valori pubblici (Manuale per l'apprezzamento dei), e per le operazioni di Borsa, di F. PICCINELLI, 2ª ed. rifatta e accresciuta, di pag. XXIV-902 . . . . . . 7 50

— *vedi* Debito pubblico - Società per azioni.

Valutazione — *vedi* Prontuario del ragioniere.

Vasellame antico - *vedi* Amatore di oggetti d'arte e curiosità.

Veleni ed avvelenamenti, di C. FERRARIS, di pagine XVI-208, con 20 incis. 2 50

Velocipedi — *vedi* Ciclista.

Ventagli artistici — *vedi* Amatore di oggetti d'arte e di curiosità - Raccoglitore di oggetti minuti.

Ventilazione — *vedi* Scaldamento.

Verbi greci anomali (I), di P. SPAGNOTTI, secondo le Grammatiche di CURTIUS e INAMA, pag. XXIV-107 . 1 50

Verbi latini di forma particolare nel perfetto e nel supino, di A. F. PAVANELLO, con indice alfabetico di dette forme, di pag. VI-215. . . . . 1 50

Vermouth — *vedi* Liquorista.

L. c.

Vernici (Fabbricazione delle), **e prodotti affini, lacche, mastici, inchiostri da stampa, ceralacche,** di U. FORNARI, 2ª ediz. ampliata di pag. XII-244 . . . . . 2 —

Veterinario (Manuale per il) di C. ROUX e V. LARI, di pag. XX-356, con 16 incis. 3 50

— *vedi* Araldica zootecnica - Cavallo - Igiene veterinaria Malattie infettive - Majale - Polizia sanitaria - Razze bovine - Zootecnia.

Vetri artistici — *vedi* Amatore oggetti d'arte - Specchi - Fotosmaltografia.

Vetro, (Il) Fabbricazione, lavorazione meccanica, applicazione alle costruzioni, alle arti ed alle industrie, di G. D'ANGELO, di pag. XIX-527, con 325 figure intercalate, delle quali 25 in tricromia 9 50

— *vedi* Fotosmaltografia - Specchi.

Vini bianchi da pasto e vini mezzo colore (Guida pratica per la fabbricazione, l'affinamento e la conservazione dei), di G. A. PRATO, pag. XII-276, 40 inc. 2 —

Vino (Il) di G. GRASSI-SONCINI, di pag. XVI-152 . . . 2 —

Vino aromatizzato — *vedi* Adulteraz - Cognac - Liquorista.

Violino (Storia del), **dei violinisti e della musica per violino,** di A. UNTERSTEINER, con una appendice di A. BONAVENTURA, di pag. VIII-228 . . . . 2 50

Violoncello (Il), **il violoncellista ed i violoncellisti,** di S. FORINO, di pag. XVII-444 . . . . 4 50

Viticoltura. Precetti ad uso dei Viticultori italiani, di O. OTTAVI. 6ª ed. riveduta ed ampliata da A. STRUCCHI, di pag. XVI-232, con 30 inc. . . . . 2 —

— *vedi* Ampelografia - Enologia.

Vocabolarietto pei numismatici (in 7 lingue), di S. AMBROSOLI, di pag. VIII-134. . . . . 1 50

Vocabolario araldico ad uso degli italiani, di G. GUELFI, di pag. VIII-294, con 356 incis. 3 50

Vocabolario compendioso della lingua russa, V. VOINOVICH, di pag. XVI-238 . . . . 3 —

Vocabolario tecnico illustrato nelle sei lingue: Italiana, Francese, Tedesca, Inglese, Spagnuola, Russa, sistema Deinhardt-Schlomann, diviso in volumi per ogni singolo ramo della tecnica industriale, compilato da Ingegneri speciali dei vari paesi con la collaborazione di numerosi stabilimenti industriali.

VOLUME I. Elementi di macchine e gli utensili più usuali per la lavorazione del legno e del metallo, in 16, di p. VIII-403, con 823 inc. e una *Prefazione* dell'Ing. Prof. G. COLOMBO. . 6 50

I volumi II. e seguenti sono in preparazione e comprenderanno le seguenti materie:

II. Impianti elettrici e trasmissioni di forze elettriche; macchine ed apparecchi elettrici, con un appendice ferrovie elettriche. — III. Caldaie e macchine a vapore. — IV. Macchine idrauliche (turbine, ruote ad acqua, pompe a stantuffo e centrifughe. — V. Elevatori e trasportatori. — VI. Utensile e macchine utensili. — VII. Ferrovie e costruzione di macchine ferroviarie. — VIII. Costruzioni in ferro e ponti. — IX. Metal-

L. c.

lurgia. — X Forme architettoniche. — XI. Costruzioni navali. — XII. Industrie tessili.

Vocabolario tipografico, di S. LANDI (In lavoro).

Volapük (Dizionario italiano-volapük), preceduto dalle Nozioni compendiose di grammatica della lingua di C. MATTEI, secondo i principî dell' inventore M. SCHLEYER, ed a norma del *Dizionario Volapuk* ad uso dei francesi, di KERCKHOFFLS, di pag. XXX-198 . 2 50

Volapük (Dizion. volapük-ital.), di C. MATTEI, p. XX-204 2 50

Volapük, Manuale di conversazione e raccolta di vocaboli e dialoghi italiani-volapük, per cura di M. ROSA, TOMMASI e A. ZAMBELLI, di pag. 152 . . . . . . 2 50

Volatili — *vedi* Animali da cortile - Colombi - Pollicoltura

Vulcanismo, di L. GATTA, di pag. VIII-268 e 28 inc. . 1 50

Zecche — *vedi* Terminologia monetaria.

Zolfo (Le miniere di), di G. CAGNI, di pag. XII-275, con 34 inc. e 10 tabelle . . . . 3 —

Zoologia, di E. H. GIGLIOLI e CAVANNA G.

I. Invertebrati, di pag. 200, con 45 figure . . 1 50

II. Vertebrati, Parte I, Generalità, Ittiopsidi (Pesci ed Anfibi), di pag. XVI-156, con 33 inc. 1 50

III. Vertebrati. Parte II, Sauropsidi, Teriopsidi (Rettili, Uccelli e Mammiferi), di pag. XVI-200, 22 inc. 1 50

Zoonosi di B. GALLI VALERIO, di pag. XV-227. . . . 1 50

Zootecnia, di G. TAMPELINI, 2ª ediz. interamente rifatta di pag. XVI-444 con 179 inc. e 12 tavole 5 50

— *vedi* Araldica Zootecnica - Bestiame - Razze bovine.

Zucchero e alcool nei loro rapporti agricoli, fisiolog. e sociali, di S. LAURETI. Di pag. XVI-426 . . . . . 4 50

Zucchero (Industria dello):

I. *Coltivazione della barbabietola da zucchero,* di B. R. DEBARBIERI, di pag. XVI-220, con 12 inc. . 2 50

II. *Commercio, importanza economica e legislazione doganale,* di L. FONTANA-RUSSO, di pag. XII-244 2 50

III. *Fabbricazione dello zucchero di barbabietola,* di A. TACCANI, di pag. XII-228, con 71 inc. . . . 3 50

— *vedi* Barbabietola.

INDICE ALFABETICO PER AUTORI